Übungsaufgaben, Einführung in die Geometrie SoSe 2013, Serie 1

Woche vom 22. bis 28 April 2013

Aufgabe 1.01 SoSe 2013

Es seien a und b zwei reelle Zahlen. Definieren Sie den Begriff arithmetisches Mittel von a und b.

Lösung von Aufgabe 1.01

Unter dem arithmetischen Mittel der Zahlen a und b versteht man den Quotienten $\frac{a+b}{2}$.

Aufgabe 1.02 SoSe 2013

Es seien a und b zwei natürliche Zahlen. Definieren Sie den Begriff größter gemeinsamer Teiler (ggT) von a und b.

Lösung von Aufgabe 1.02

Unter dem größten gemeinsamen Teiler der natürlichen Zahlen a und b versteht man die größte natürliche Zahl t, die sowohl a als auch b teilt.
Oder auch:

$$\mathrm{ggT}(a, b) = t :\Leftrightarrow t \mid a \wedge t \mid b \wedge \neg\exists c : c \mid a \wedge c \mid b \wedge t \mid c.$$

Aufgabe 1.03 SoSe 2013

Informieren Sie sich darüber, was man unter der Gärtnerkonstruktion einer Ellipse versteht. Entwickeln Sie eine Definition des Begriffs Ellipse, wie er sich unmittelbar aus der Gärtnerkonstruktion ergibt.

Lösung von Aufgabe 1.03

Es seien F_1 und F_2 zwei Punkte der Ebene ε. Ferner sei a eine beliebige, dann aber feste positive reelle Zahl. Unter einer Ellipse versteht man die Menge aller Punkte P der Ebene ε mit $|PF_1| + |PF_2| = a$.

Aufgabe 1.04 SoSe 2013

Mark definiert den Begriff des Rechtecks wie folgt:

Definition 1 (*Rechteck*)

> *Ein Rechteck ist ein Viereck, das einen rechten Innewinkel hat und bei dem die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleichlang zueinander sind.*

Diskutieren Sie, ob die Eigenschaft der Minimalität für Marks Definition gewährleistet ist.

Lösung von Aufgabe 1.04

- Den rechten Innenwinkel muss man fordern. Dass alle weiteren Innenwinkel auch Rechte sind, ergibt sich aus den weiteren Eigenschaften.
- Für beliebige Vierecke mit zwei Paaren paralleler Seiten kann man zeigen, dass die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks kongruent zueinander sind.
- Sind umgekehrt die gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks jeweils kongruent zueinander, kann man zeigen, dass sie auch parallel zueinder sind.

Marks Definition ist demnach nicht minimal. Alernativen wären:

1 Ein Rechteck ist ein Viereck mit einem rechten Innenwinkel und zwei Paaren paralleler Seiten.

2 Ein Rechteck ist ein Viereck, das einen rechten Innenwinkel hat und bei dem die gegenüberliegenden Seiten jeweils kongruent zueinander sind.

Aufgabe 1.05 SoSe 2013

Der Begriff der Parallelität zweier Geraden sei bereits definiert. Definieren Sie, was man darunter versteht, dass zwei Geraden windschief zueinander sind.

Lösung Aufgabe 1.05

Zwei Geraden sind parallel, wenn sie entweder identisch sind oder komplanar und schnittpunktfrei sind.
Zwei Geraden sind windschief, wenn sie nicht parallel und schnittpunktfrei sind.

Aufgabe 1.06 SoSe 2013

In der Differentialgeometrie ist der Begriff der "Krümmung einer Kurve" von zentraler Bedeutung. Kreise sind Kurven mit "konstanter Krümmung", d.h. ein Kreis hat in jedem seiner Punkte dieselbe Krümmung. Je größer ein Kreis k ist, desto mehr nähern sich hinreichend kleine Teilstücke des Kreises Geradenstücken an. Je größer ein Kreis ist, desto geringer ist somit seine Krümmung. Geraden sind auch Kurven konstanter Krümmung, Jede Gerade hat in jedem ihrer Punkte die Krümmung 0. Geraden könnte man als Kreise mit unendlich großem Radius auffassen. Entwerfen Sie eine sinnvolle Definition des Begriffes "Krümmung eines Kreises".
Hinweis: Krümmungen werden durch reelle Zahlen angegeben.

0.0.1 Lösung von Aufgabe 1.06

Es sei c ein Kreis mit dem Radius r. Die Krümmung k von c berechnet sich zu $k := \frac{1}{r}$.

Aufgabe 1.07 SoSe 2013

Sie wollen Ihre Schüler erleben lassen, dass Kreise Kurven mit konstanter Krümmung sind. Wie machen Sie das?

Lösung von Aufgabe 1.07

z.B. Fahrradfahren auf dem Schulhof mit konstant eingeschlagenem Lenker. (ggf. Lenker arretieren)

Aufgabe 1.08 SoSe 2013

Ellipsen lassen sich auch als Kegelschnitte definieren. Es sei K ein Kegel mit dem Öffnungswinkel α und der Spitze S. Seine Rotationsachse R möge senkrecht auf der Ebene ε_0 stehen. Es sei ε eine zweite Ebene, die K schneidet.
Ergänzen Sie:

Definition 2 (*Ellipse*)

Wenn ... , dann ist der Schnitt von ε mit K eine Ellipse.

Lösung von Aufgabe 1.08

Im Folgenden wird unterstellt, dass die Höhe des Kegels unendlich ist. Ferner sei β der Schnittwinkel zwischen ε_0 und ε.
Wenn $0 \leq \beta < 90° - \frac{\alpha}{2}$ und $S \notin \varepsilon$, dann ist der Schnitt ...

Aufgabe 1.09 SoSe 2013

Was wird hier definiert?

Definition 3 (...)

Es sei r ein positive reelle Zahl. $M := \{(r \cdot \cos(\varphi)|r \cdot \sin(\varphi)|\varphi \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$.

Lösung von Aufgabe 1.09

Kreis in Mittelpunktslage mit Radius r. (s. Sinus und Cosinus am Einheitskreis bzw. am Kreis)

Aufgabe 1.10 SoSe 2013

Diskutieren Sie die folgende Definition:

Definition 4 (*Size-Zero-Menge*)

Es sei K ein kartesisches Koordinatensystem. Unter einer Size-Zero-Menge versteht man die Menge aller Punkte $P\,(x_p|y_p)$ mit $x_p < 0 \wedge y_p\sqrt{x_p}$.

Lösung von Aufgabe 1.10

Es wird mal wieder die leere Menge definiert. Die Quadratwurzel ist für negative Zahlen nicht definiert. Die Bezeichnung Size-Zero-Menge passt also ganz gut.