

## Aufgabe 1: Definieren

Nr.	Aufgabe	Punkte	
a)	Definieren Sie den Begriff <i>Quadrat</i> über seine Diagonalen. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ein Viereck mit gleich langen, senkrecht aufeinander stehenden und sich halbierenden Diagonalen nennt man Quadrat.</li> <li>• Eine Raute mit gleich langen Diagonalen nennt man Quadrat.</li> <li>• ...</li> </ul>	3	
b)	Definieren Sie den Begriff <i>Strecke</i> $\overline{XY}$ . $\overline{XY} := \{P \mid Zw(X,P,Y)\} \cup \{X,Y\}$	2	
c)	Definieren Sie den Begriff <i>Radius eines Kreises</i> $k$ . (Hinweise: Kreis sei bereits definiert. Jeder Kreis hat unendlich viele Radien. Radien sind Strecken.) M sei der Mittelpunkt des Kreises $k$ und P ein Punkt auf $k$ . Die Strecke $\overline{MP}$ nennt man Radius des Kreises $k$ .	2	
d)	Ergänzen Sie die Definition für Scheitelwinkel: Definition (Scheitelwinkel): Seien SA und SB zwei verschiedene Geraden, die sich in S schneiden. Den Winkel $\angle SA^+, SB^+$ nennt man Scheitelwinkel von $\angle SA^-, SB^-$ .	3	
e)	Warum ist die folgende Definition nicht korrekt? Nennen Sie 2 Gründe. Definition (Winkel): A, B und C seien drei paarweise verschiedene Punkte. Die Vereinigungsmenge von $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ heißt Winkel $\angle BAC$ . <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Die Punkte dürfen nicht kollinear sein, was in der Definition fehlt.</li> <li>2) Ein Winkel ist die Vereinigung von zwei Strahlen und nicht von 2 Strecken.</li> </ol>	2	

## Aufgabe 2: Aussagen und Sätze

**Satz I.6 besagt: Eine Ebene und eine nicht in ihr liegende Gerade haben höchstens einen Punkt gemeinsam.**

Nr.	Aufgabe	Punkte	
a)	Formulieren Sie Satz I.6 mit „Wenn...dann...“. $\mathbf{g \notin E \Rightarrow  g \cap E  \leq 1}$ Wenn eine Gerade $g$ nicht in einer Ebene $E$ liegt, dann haben $g$ und $E$ höchstens einen Punkt gemeinsam.	2	
b)	Formulieren Sie die Kontraposition von Satz I.6. $\mathbf{ g \cap E  > 1 \Rightarrow g \subseteq E}$ Wenn $g$ und $E$ mehr als einen Punkt gemeinsam haben, dann liegt $g$ in $E$ .	2	
c)	Formulieren Sie die Umkehrung von Satz I.6. $\mathbf{ g \cap E  \leq 1 \Rightarrow g \notin E}$ Wenn $g$ und $E$ höchstens einen Punkt gemeinsam haben, dann liegt $g$ nicht in $E$ .	1	
d)	Wie lautet die Annahme, wenn Sie Satz I.6 durch einen Widerspruch beweisen wollen? $\mathbf{g \notin E \wedge  g \cap E  > 1}$ $g$ liegt nicht in $E$ und $g$ und $E$ haben mehr als einen Punkt gemeinsam.	1	
e)	Fassen Sie Satz I.6 und seine Umkehrung zu einem Kriterium zusammen. $\mathbf{g \notin E \Leftrightarrow  g \cap E  \leq 1}$ Eine Ebene $E$ und eine Gerade $g$ haben genau dann höchstens einen Punkt gemeinsam, wenn $g$ nicht in $E$ liegt.	2	

### Aufgabe 3: Begründen und Beweisen

Nr.	Aufgabe	Punkte																																					
a)	<p>Begründen Sie durch Nennung eines Axioms: Sei <math>h</math> eine Gerade und <math>X</math> ein Punkt mit <math>X \in h</math>. Dann gilt: <math>\exists Y: Y \neq X \wedge Y \in h</math>.</p> <p>Axiom I/2</p>	1																																					
b)	<p>Begründen Sie durch Nennung eines Axioms: Sei <math>E</math> eine Ebene, <math>h</math> eine Gerade und <math>A, B</math> zwei Punkte mit <math>A, B \in h</math>. Dann gilt: <math>A, B \in E \Rightarrow h \in E</math>.</p> <p>Axiom I/5</p>	1																																					
c)	<p>Widerlegen Sie durch Nennung eines Axioms: Sei <math>AB^+</math> eine Halbgerade mit <math>C \in AB^+</math>. Dann gilt: <math>\exists Y \in AB^+: Y \neq C \wedge  AY  =  AC </math>.</p> <p>Axiom III/1</p>	1																																					
d)	<p>Gegeben sei ein Punkt <math>D</math> auf einem Strahl <math>AB^+</math> mit <math> AD  &lt;  AB </math>. Zeigen Sie, dass dann gilt: <math>Zw(A, D, B)</math>.</p> <p>Voraussetzung: <math>A \neq B \neq D \neq A;  AD  &lt;  AB , D \in AB^+</math>                      Behauptung: <math>Zw(A, D, B)</math>.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Nummer</th> <th>Beweisschritt</th> <th>Begründung</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1)</td> <td>koll(A,B,D)</td> <td>VSS, Def. kollinear</td> </tr> <tr> <td>2)</td> <td>Es gilt: <math> AB  +  BD  =  AD </math>                      oder <math> DA  +  AB  =  DB </math>                      oder <math> AD  +  DB  =  AB </math></td> <td>Axiom II/3, (1)</td> </tr> <tr> <td>3)</td> <td>Es gilt nun: <math>Zw(A, B, D)</math> oder <math>Zw(B, A, D)</math> oder <math>Zw(B, D, A)</math></td> <td>(2), Definition Zwischenrelation</td> </tr> </tbody> </table> <p>Bleibt zu zeigen: Es gilt <math>Zw(A, D, B)</math>                      Annahme: Es gilt <math>Zw(A, B, D)</math> oder <math>Zw(D, A, B)</math></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Nummer</th> <th>Beweisschritt</th> <th>Begründung</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4)</td> <td>Es gilt: <math>Zw(A, B, D)</math></td> <td>Annahme</td> </tr> <tr> <td>5)</td> <td>Es gilt: <math> AB  +  BD  =  AD </math></td> <td>(4), Definition Zw.</td> </tr> <tr> <td>6)</td> <td><math> BD  &gt; 0</math></td> <td>II/1</td> </tr> <tr> <td>7)</td> <td><math> AB  &lt;  AD </math>, Widerspruch zur VSS  <math> AD  &lt;  AB  \Rightarrow Zw(A, B, D)</math> gilt nicht</td> <td>(5), (6), Rechnen in <math> R</math></td> </tr> <tr> <td>8)</td> <td>Es gilt: <math>Zw(D, A, B)</math></td> <td>Annahme</td> </tr> <tr> <td>9)</td> <td><math>D \in AB^-</math>, Widerspruch zu <math>D \in AB^+ \Rightarrow Zw(D, A, B)</math> gilt nicht</td> <td>Def. Strahl, (8)</td> </tr> <tr> <td>10)</td> <td>Annahmen zu verwerfen. Es gilt <math>Zw(A, D, B)</math></td> <td>(3),(7),(9) q.e.d</td> </tr> </tbody> </table>	Nummer	Beweisschritt	Begründung	1)	koll(A,B,D)	VSS, Def. kollinear	2)	Es gilt: $ AB  +  BD  =  AD $ oder $ DA  +  AB  =  DB $ oder $ AD  +  DB  =  AB $	Axiom II/3, (1)	3)	Es gilt nun: $Zw(A, B, D)$ oder $Zw(B, A, D)$ oder $Zw(B, D, A)$	(2), Definition Zwischenrelation	Nummer	Beweisschritt	Begründung	4)	Es gilt: $Zw(A, B, D)$	Annahme	5)	Es gilt: $ AB  +  BD  =  AD $	(4), Definition Zw.	6)	$ BD  > 0$	II/1	7)	$ AB  <  AD $ , Widerspruch zur VSS $ AD  <  AB  \Rightarrow Zw(A, B, D)$ gilt nicht	(5), (6), Rechnen in $ R$	8)	Es gilt: $Zw(D, A, B)$	Annahme	9)	$D \in AB^-$ , Widerspruch zu $D \in AB^+ \Rightarrow Zw(D, A, B)$ gilt nicht	Def. Strahl, (8)	10)	Annahmen zu verwerfen. Es gilt $Zw(A, D, B)$	(3),(7),(9) q.e.d	5	
Nummer	Beweisschritt	Begründung																																					
1)	koll(A,B,D)	VSS, Def. kollinear																																					
2)	Es gilt: $ AB  +  BD  =  AD $ oder $ DA  +  AB  =  DB $ oder $ AD  +  DB  =  AB $	Axiom II/3, (1)																																					
3)	Es gilt nun: $Zw(A, B, D)$ oder $Zw(B, A, D)$ oder $Zw(B, D, A)$	(2), Definition Zwischenrelation																																					
Nummer	Beweisschritt	Begründung																																					
4)	Es gilt: $Zw(A, B, D)$	Annahme																																					
5)	Es gilt: $ AB  +  BD  =  AD $	(4), Definition Zw.																																					
6)	$ BD  > 0$	II/1																																					
7)	$ AB  <  AD $ , Widerspruch zur VSS $ AD  <  AB  \Rightarrow Zw(A, B, D)$ gilt nicht	(5), (6), Rechnen in $ R$																																					
8)	Es gilt: $Zw(D, A, B)$	Annahme																																					
9)	$D \in AB^-$ , Widerspruch zu $D \in AB^+ \Rightarrow Zw(D, A, B)$ gilt nicht	Def. Strahl, (8)																																					
10)	Annahmen zu verwerfen. Es gilt $Zw(A, D, B)$	(3),(7),(9) q.e.d																																					

e)	<p>Es sei <math>gA^-</math> eine Halbebene der Ebene E. Für den Punkt B gelte <math>B \in gA^+ \setminus g</math>.                  Beweisen Sie für einen Punkt X mit <math>\text{nkoll}(A,B,X)</math>: <math>X \in gA^- \Rightarrow X \in gB^-</math>.</p> <p>VSS: <math>B \in gA^+ \setminus g, X \in gA^-, \text{nkoll}(A,B,X)</math>                  Beh.: <math>X \in gB^-</math></p> <p>Fall 1: <math>X \in g</math>                  Fall 2: <math>X \notin g</math></p> <p>Beweis Fall 1:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <tr> <td style="width: 50%; padding: 2px;">1) <math>X \in g</math></td> <td style="padding: 2px;">VSS Fall 1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">2) <math>X \in gB^-</math></td> <td style="padding: 2px;">(1), Def. Halbebene</td> </tr> </table> <p>Beweis Fall 2:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; padding: 2px;">(1) <math>B \in gA^+ \setminus g</math></td> <td style="padding: 2px;">VSS, Def. Halbebene</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">(2) <math>\overline{AB} \cap g = \{\}</math></td> <td style="padding: 2px;">Def. Halbebene, (1)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">(3) <math>\overline{XA} \cap g \neq \{\}</math></td> <td style="padding: 2px;">VSS (<math>X \in gA^-</math>), Def. Halbebene</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">(4) <math>\overline{XB} \cap g \neq \{\}</math></td> <td style="padding: 2px;">(2), (3), III/2</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">(5) <math>X \in gB^-</math></td> <td style="padding: 2px;">(4), Def. Halbebene</td> </tr> </table>	1) $X \in g$	VSS Fall 1	2) $X \in gB^-$	(1), Def. Halbebene	(1) $B \in gA^+ \setminus g$	VSS, Def. Halbebene	(2) $\overline{AB} \cap g = \{\}$	Def. Halbebene, (1)	(3) $\overline{XA} \cap g \neq \{\}$	VSS ( $X \in gA^-$ ), Def. Halbebene	(4) $\overline{XB} \cap g \neq \{\}$	(2), (3), III/2	(5) $X \in gB^-$	(4), Def. Halbebene	8	
1) $X \in g$	VSS Fall 1																
2) $X \in gB^-$	(1), Def. Halbebene																
(1) $B \in gA^+ \setminus g$	VSS, Def. Halbebene																
(2) $\overline{AB} \cap g = \{\}$	Def. Halbebene, (1)																
(3) $\overline{XA} \cap g \neq \{\}$	VSS ( $X \in gA^-$ ), Def. Halbebene																
(4) $\overline{XB} \cap g \neq \{\}$	(2), (3), III/2																
(5) $X \in gB^-$	(4), Def. Halbebene																

## Auswertung

36	1		27	2,5		18	4		9	5
35	1		26	3		17	4,5		8	5,5
34	1,5		25	3		16	4,5		7	5,5
33	1,5		24	3,5		15	4,5		6	5,5
32	1,5		23	3,5		14	4,5		5	5,5
31	2		22	3,5		13	4,5		4	6
30	2		21	4		12	5		3	6
29	2,5		20	4		11	5		2	6
28	2,5		19	4		10	5		1; 0	6