Prüfungsthemen/Kontrollfragen

Algebra

1 allgemeiner Gruppenbegriff

1.1 Themen, Begriffe

(1) Abgeschlossenheit

(2) Assoziativität

(3) Eins- bzw. Neutralelement

(4) inverse Elemente

(5) Gruppendefinition lang

(6) Gruppendefinition kurz

(7) Gruppendefinition Gleichung

(8) Abelsche Gruppe

(9) Verknüpfungstabelle

(10) Halbgruppe

(11) Modul

(12) Ordnung einer Gruppe

1.2 Kontrollfragen

(1) Warum bilden die natürlichen Zahlen sowohl mit der Addition als auch mit der Multiplikation keine Gruppe?

(2) Wodurch erfahren Schülerinnen und Schüler, dass $[\mathbb{N}, +]$ und $[\mathbb{N}, \cdot]$ keine Gruppen sind?

(3) Warum ist das Linkseinselement einer Gruppe auch das Rechtseinselement dieser Gruppe?

(4) Es sei $[G, \circ]$ eine Gruppe. Begründen Sie: $\forall a \in G : a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$.

(5) Warum hat jede Gruppe genau ein Eins- bzw. Neutralelement?

(6) Warum hat in jeder Gruppe jedes Element genau ein inverses Element?

(7) Warum sind in jeder Gruppe $[G, \circ]$ die Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ eindeutig lösbar?

(8) Es sei $[G, \circ]$ eine endliche Gruppe. Warum tritt in der Verknüpfungstafel von $[G, \circ]$ jedes Element aus G in jeder Zeile und in jeder Spalte jeweils genau einmal auf?

2 Spezielle Gruppenbeispiele

(1) Erläutern Sie die Deckabbildungsgruppen der folgenden geometrischen Objekte:

- Quadrat
- Rechteck
- Raute
- Drachen
- symmetrisches Trapez
- Parallelogramm
- gleichseitiges Dreieck

(2) Erläutern Sie additive und multiplikative Restklassengruppen.

(3) Begründen Sie: Wenn $m \in \mathbb{N}$ keine Primzahl ist, dann ist $[\mathbb{Z}/_m, \odot]$ keine Gruppe.

(4) Es sei $\mathbb{M}_{2\times 2}$ die Menge aller 2×2 Matrizen und $\otimes$ die Matrizenmultiplikation. Warum ist $[\mathbb{M}_{2\times 2}, \otimes]$ keine Gruppe?

(5) Spezifizieren Sie drei Teilmengen von $\mathbb{M}_{2\times 2}$, die bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bilden.

(6) Geben Sie drei Matrizen an, deren inverse Matrix jeweile die transponierte Matrix ist.

(7) Was hat die Invertierbarkeit einer Matrix mit der Lösbarkeit eines LGS zu tun?

(8) Es sei $\mathbb{F}_l$ die Menge aller Funktionen, die sich durch eine Gleichung des Typs $y(x) = m \cdot x + n$ beschreiben lassen. $\circ$ sei die NAF von Funktionen. Beweisen Sie: $[\mathbb{F}_l, \circ]$ ist eine Gruppe.

(9) Es sei $\mathbb{R}^2$ die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen. Geben Sie eine Operation $\oplus$ derart an, dass $[\mathbb{R}^2, \oplus]$ eine Gruppe ist.

(10) Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir eine Operation $\oslash$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oslash \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix}$. Ist $[\mathbb{R}^2, \oslash]$ eine Gruppe?

(11) Begründen Sie: Es gibt genau zwei Typen von Gruppen mit genau vier Elementen: Die Kleinsche Vierergruppe und die zyklische Gruppe mit vier Elementen.

(12) Begründen Sie: Es gibt genau einen Typ von Gruppen mit genau drei Gruppenelementen.

3 Untergruppen

(1) Definieren Sie den Begriff Untergruppe.

(2) Erläutern und begründen Sie das Untergruppenkriterium 1.

(3) Interpretieren Sie das Haus der Vierecke als Untergruppengraph.

(4) Beweisen Sie: Die Menge der proportionalen Funktionen ist bezüglich der NAF von Funktionen eine Untergruppe der Gruppe der linearene Funktionen (ebenfalls natürlich bezüglich der NAF von Funktionen).

(5) Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes für $2 \times 2-$Matrizen:
Die Menge der Matrizen mit der Determinante 1 ist eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren Matrizen (alles bezüglich der Matrizenmultiplikation).

(6) Es sei $\mathbb{M}_{2\times 2}$ die Menge aller 2×2 Matrizen. Definieren Sie auf $\mathbb{M}_{2\times 2}$ eine Operation $\oplus$ derart, dass $[\mathbb{M}_{2\times 2}, \oplus]$ eine Gruppe ist.

(7) Erläutern Sie den Satz von Lagrange anhand selbstgewählter Beispiele.

(8) Beweisen Sie: $[2\mathbb{Z}, +]$ ist eine Untergruppe von $[\mathbb{Z}, +]$.

4 Zyklische Gruppen

(1) Es seien $[G, \circ]$ eine Gruppe, a ein Element aus G und n eine natürlich Zahl. Definieren Sie a^n.

(2) Definieren Sie die Begriffe *Gruppenordnung* und *Ordnung eines Gruppenelementes*.

(3) Definieren Sie den Begriff *erzeugendes Element* einer Gruppe.

(4) Definieren Sie den Begriff *zyklische Gruppe*.

(5) Beweisen Sie: $[\mathbb{Z}/_7, \odot]$ ist eine zyklische Gruppe.

(6) Beweisen Sie: Alle zyklischen Gruppen sind kommutativ.

(7) Beweisen Sie: Wenn eine Gruppe die Ordnung 3 hat, dann ist sie zyklisch.

5 Homomorphie und Isomorphie von Gruppen

(1) Definieren Sie die Begriffe Gruppenisomorphismus und Gruppenhomomorphismus.

(2) Beweisen Sie $[\mathbb{Z}, +]$ ist isomorph zu $[2\mathbb{Z}, +]$.

(3) Geben Sie eine additive und eine multiplikative Gruppe an, die zueinander isomorph sind.

(4) Beweisen Sie: Alle zyklischen Gruppen derselben Ordnung sind zueiander isomorph.

(5) Geben Sie einen Gruppenhomomorphismus an, der die Gruppe $[\mathbb{Z}/_6, \oplus]$ auf eine ihrer Untergruppen abbildet.