PH Heidelberg, Fach Mathematik

Klausur zur Akademischen Teilprüfung, Modul 2

Einführung in die Geometrie

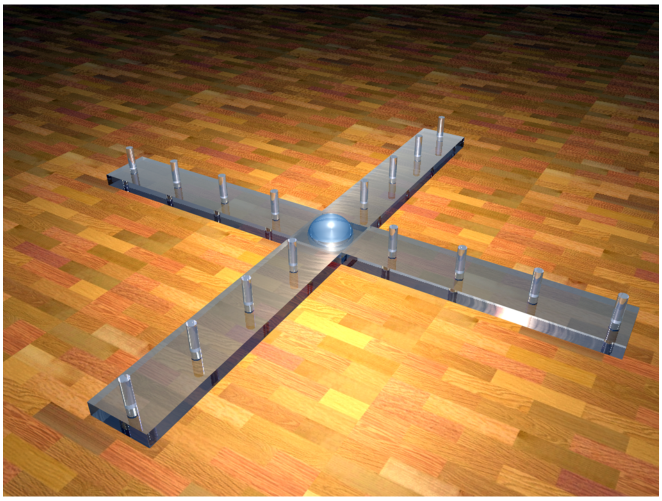


Abbildung 01: Winkelkreuz

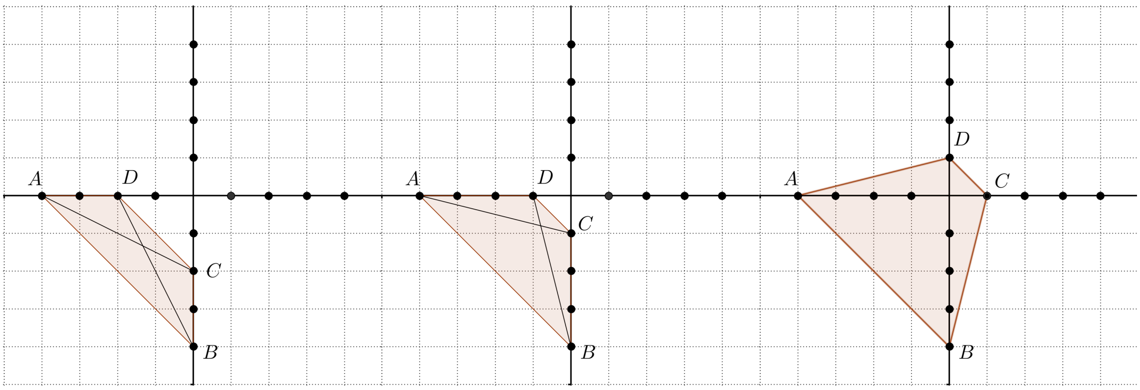


Abbildung 02: Spannen von gleichschenkligen Trapezen auf dem Winkelkreuz

Sommersemester 12

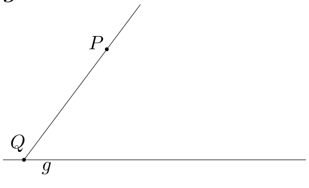
24. Juli 2012

Aufgabe 1: Definieren

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Definieren Sie den Begriff *Winkel* $\angle ASB$.	2	
b)	Ergänzen Sie (I steht für Inneres): $I\left(\angle ASB\right) := \{P\vert \dots \qquad \}$	2	
c)	Die Winkel α und β seien Stufenwinkel. Ergänzen Sie: α und γ sind Wechselwinkel, wenn ...	1	
d)	Begründen Sie mit einer Skizze, warum die folgende Definition nicht korrekt ist: α und β heißen Nebenwinkel $:\Leftrightarrow \vert\alpha\vert + \vert\beta\vert = 180°$.	1	
e)	Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Definieren Sie: Durchmesser von k. Hinweis: Ein Durchmesser ist eine Strecke.	2	
f)	Welcher Begriff wird hier definiert: Es sei $\overline{ABCD}$ ein Viereck in der Ebene ε. $\overline{ABCD}$ heißt ... $:\Leftrightarrow \exists M \in \varepsilon : \overline{AM} \cong \overline{BM} \cong \overline{CM} \cong \overline{DM}$.	1	
g)	Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Der Begriff AB^+ sei bereits definiert. Definieren Sie unter expliziter Verwendung von AB^+ den Begriff $AB^- := \dots$	2	
h)	Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Definieren Sie: α ist Peripheriewinkel von k.	2	

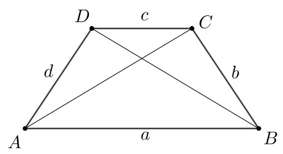
Aufgabe 2: Argumentieren, Begründen, Beweisen

Alle Teilaufgaben auf diesem Blatt beziehen sich auf die ebene Geometrie.

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Wann gilt $P \in AB^+ \wedge P \in AB^-$?	1	
b)	Es seien A, B, C drei paarweise verschiedene Punkte. Begründen Sie durch Nennung eines Axioms, dass $\|AC\| + \|CB\| < \|AB\|$ nicht gelten kann.	1	
c)	Es seien A, B, P drei paarweise verschiedene Punkte. Begründen Sie: $P \in \overline{AB} \Rightarrow P \notin AB^-$	3	
d)	Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck. Ferner seien folgende Punktmengen gegeben: $m_a := \left\{P \mid \overline{PC} \cong \overline{PB}\right\}$ und $m_b := \left\{P \mid \overline{PC} \cong \overline{PA}\right\}$. Es gelte $m_a \cap m_b = \{Z\}$. Formulieren Sie mittels Z eine hinreichende Bedingung dafür, dass $\|\angle ACB\| = 90°$ gilt.	1	
e)	Begründen Sie durch Nennung eines Satzes, warum Ihre Bedingung aus Teilaufgabe d) $\|\angle ACB\| = 90°$ nach sich zieht.	1	
f)	In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $A(-1\|0), B(1\|0), C(0\|1)$ gegeben. Die Gerade m mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}$ schneidet $\overline{AC}$ im Punkt $S_1(-\frac{1}{2}\|\frac{1}{2})$ und $\overline{BC}$ im Punkt $S_2(\frac{1}{2}\|\frac{1}{2})$. Nach welchem Axiom hat m mit $\overline{AB}$ keinen gemeinsamen Punkt?	1	
g)	Es sei $P \notin g \wedge Q \in g : PQ \not\perp g$. Beweisen Sie die Existenz des Lotes von P auf g. (Beziehen Sie sich auf die Skizze (Abb. 3.)  Abbildung 03	6	

Aufgabe 3: Kriterien

Referendarin Lisa läßt in der 7a Trapeze auf dem Winkelkreuz (Abb. 01) spannen. Es entstehen nur gleichschenklige Trapeze (Abb. 02). Die Schüler vermuten, dass die Diagonalen bei gleichschenkligen Trapezen immer kongruent zueinander sind. Um diesbezüglich sicher zu sein, wollen sie ihre Vermutung beweisen.

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Wir nennen den Satz, den Lisas Schüler vermuten, Satz 1. Formulieren Sie Satz 1 in der *Form Wenn-Dann.*	2	
b)	Lisa erarbeitet mit ihren Schülern eine Skizze (Abb. 04). Formulieren Sie die Voraussetzungen und die Behauptung von Satz 1 bzgl. Abb. 04. Verwenden Sie dabei einzelne Stücke (Seiten, Diagonalen) von Viereck $\overline{ABCD}$. V_1: ... V_2: ... B: ...  Abb. 04	2	
c)	Beweisen Sie Satz 1 auf der Rückseite dieses Blattes. Hinweis 1: Das folgende Kriterium K_P hilft: $a \| b :\Leftrightarrow \forall P, Q \in a : \|Pb\| = \|Qb\|$. Hinweis 2: Beziehen Sie sich im Beweis auf eine Skizze.	7	
d)	Ergänzen Sie die Umkehrung von Satz 1: Satz 2: Wenn ein Trapez ... dann ...	2	
e)	Wir gehen von folgender Definition aus: Definition T: Ein Viereck mit einem Paar paralleler Seiten heißt Trapez. Beweisen Sie atz 2 auf der Rückseite des Blattes. Nehmen Sie in Ihrem Beweis Bezug auf eine Skizze. (Hilfe: Trapez mit kürzerer der beiden parallelen Seiten unten. Lote von den Endpunkten der oberen längeren Seite fällen	7	
f)	Definieren Sie den Begriff gleichschenkliges Trapez unter Verwendung des Oberbegriffs Trapez und des durch die Sätze 1 und 2 nun gültigen Kriteriums.	3	

Aufgabe 4: Beweisen wie die Schüler

Der Satz des Thales lässt sich mit Hilfe von Dreiecken formulieren. Ergänzen Sie:

Satz des Thales:	Punkte	
Es seien $\overline{ABC}$ ein Dreieck und k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Wenn (V_1) k ... und (V_2) ... dann ...	3	

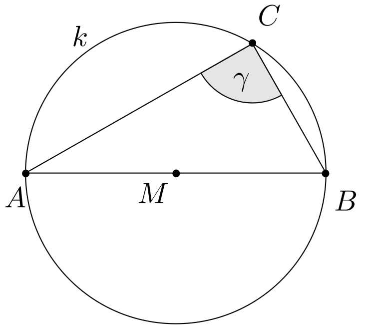


Abb. 05

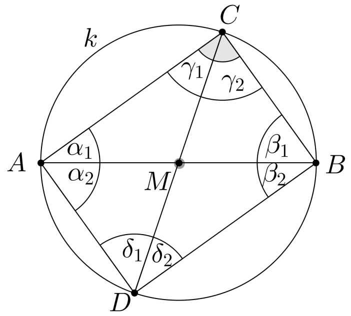


Abb. 06

Mark zeichnet CM^+ ein und erhält den Schnittpunkt D (Abb. 06). Die Korrektheit dieser Hilfskonstruktion müssen Sie nicht begründen. Er kennzeichnet die Winkel entsprechend Abb. 06 und beginnt zu beweisen. Vollziehen Sie den Beweis von Mark nach.

Nr.	Beweisschritt	Begründung	Punkte	
(I)	$\overline{MA} \cong \overline{MB} \cong \overline{MC} \cong \overline{MD}$	...	1	
(II)	$\lvert\alpha_1\rvert+\lvert\alpha_2\rvert+\lvert\delta_1\rvert+\lvert\delta_2\rvert+\lvert\beta_2\rvert+$ $\lvert\beta_1\rvert + \gamma_2\rvert + \gamma_1\rvert = 360°$	...	1	
(III)	$\alpha_1 \cong \gamma_1, \alpha_2 \cong \delta_1$, $\beta_1 \cong \gamma_2, \beta_2 \cong \delta_2$	...	2	
(IV)	$2 \cdot \lvert\delta_1\rvert + 2 \cdot \lvert\delta_2\rvert+$ $2 \cdot \lvert\gamma_1\rvert + 2 \cdot \lvert\gamma_2\rvert = 360°$	...	2	
(V)	$\lvert\delta_1\rvert+\lvert\delta_2\rvert+\lvert\gamma_1\rvert+\lvert\gamma_2\rvert = 180°$	...	1	
(VI)	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$	...	1	
(VII)	$\angle AMD \cong \angle BMC$, $\angle AMC \cong \angle BMD$	...	1	
(VIII)	$\overline{AMD} \cong \overline{BMC}$, $\overline{AMC} \cong \overline{BMD}$	...	3	
(IX)	$\alpha_1 \cong \beta_2$, $\alpha_2 \cong \beta_1$	...	1	
(X)	$\overline{ABC} \cong \overline{ABD}$	...	3	
(XI)	$\lvert\delta_1\rvert + \lvert\delta_2\rvert = \lvert\gamma_1\rvert + \lvert\gamma_2\rvert$	...	1	
(XII)	$\lvert\gamma_1\rvert + \lvert\gamma_2\rvert = 90°$	...	2	
(XIII)	$\lvert\gamma\rvert = 90°$	(XII)		

Platz für weitere Ausführungen

Auswertung

Punkte	Note		Punkte	Note
72	1		35	4,5
71	1		34	4,5
70	1		33	4,5
69	1		32	4,5
68	1		31	4,5
67	1,5		30	4,5
66	1,5		29	4,5
65	1,5		28	4,5
64	1,5		27	4,5
63	1,5		26	5
62	2		25	5
61	2		24	5
60	2		23	5
59	2		22	5
58	2		21	5
57	2,5		20	5
56	2,5		19	5
55	2,5		18	5
54	2,5		17	5,5
53	2,5		16	5,5
52	3		15	5,5
51	3		14	5,5
50	3		13	5,5
49	3		12	5,5
48	3		11	5,5
47	3		10	5,5
46	3,5		9	5,5
45	3,5		8	6
44	3,5		7	6
43	3,5		6	6
42	3,5		5	6
41	4		4	6
40	4		3	6
39	4		2	6
38	4		1	6
37	4		0	6
36	4			

erreichte Punkte	Note