Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 9

(Lösungen)

1. Beweisen Sie: Es gibt rechte Winkel und jeder rechte Winkel hat das Maß 90.

Existenz eines rechten Winkels:

Es sei AB^+ ein Strahl auf dem Träger der Halbebene h. Nach Axiom IV/2 gibt es in h genau einen Strahl AC^+ derart, dass das Maß des Winkels $\langle AB^+AC^+$ die Zahl 90 ist.
Nun sind die Winkel $\langle AB^+AC^+$ und $\langle AB^-AC^+$ Nebenwinkel und somit nach Axiom IV/4 supplementär. Hieraus folgt nach Definition IV/4 $|\langle AB^+AC^+| + |\langle AB^-AC^+| = 180$
Damit ist wegen $|\langle AB^+AC^+| = 90$ das Maß des Winkels $\langle AB^-AC^+$ auch 90.
Damit haben die beiden Nebenwinkel $\langle AB^+AC^+$ und $\langle AB^-AC^+$ beide dasselbe Maß und sind somit nach Definition V/5 rechte Winkel.
Somit haben wir bewiesen, dass es rechte Winkel gibt.

Es bleibt zu zeigen, dass die Größe eines jeden rechten Winkels 90 ist:

Es seien α und β zwei Nebenwinkel mit $|\alpha| = |\beta|$. Nach dem Axiom IV/4 sind α und β supplementär, was $|\alpha| + |\beta| = 180$ bedeutet. Die Winkel α und β sind rechte Winkel und haben damit dieselbe Größe. Damit gilt $|\alpha| = |\beta| = \frac{180}{2} = 90$.

2. Beweisen Sie: Wenn α und β zwei Scheitelwinkel sind, dann haben α und β dieselbe Größe.

Es sei $\alpha = \langle p^+q^+$ und damit $\beta = \langle p^-q^-$ der Scheitelwinkel von α.
Der Winkel $\gamma = \langle q^+p^-$ ist dann Nebenwinkel sowohl von α als auch von β.
Nach Axiom IV/4 gelten die folgenden beiden Gleichungen:
$|\alpha| + |\gamma| = 180,\ |\beta| + |\gamma| = 180$
Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar $|\alpha| = |\beta|$, was letztlich zu beweisen war.

3. Definieren Sie die Begriffe Stufenwinkel und Wechselwinkel (an geschnittenen Geraden).

Definition: Zwei Winkel $\angle(p,q)$ und $\angle(r,s)$ heißen *Stufenwinkel*, falls ein Schenkel r des einen Winkels eine Teilmenge eines Schenkels p des anderen Winkels ist und die anderen beiden Schenkel q und s in einer Halbebene bezüglich der Geraden g liegen, die durch die beiden Schenkel p und r gegeben ist.
Zwei Winkel $\angle(p,q)$ und $\angle(r,s)$ heißen *Wechselwinkel*, falls der Scheitelwinkel des Winkels $\angle(p,q)$ und der Winkel $\angle(r,s)$ Stufenwinkel sind.

4. Wir setzten voraus, dass wir Geometrie in einer Ebene betreiben. Gegeben seien eine Gerade und ein Punkt auf dieser Geraden. Beweisen Sie, dass es genau eine Senkrechte zu dieser Geraden gibt, die durch den gegebenen Punkt geht.

Lösung:

Es sei *g* eine Gerade und *P* ein Punkt auf *g*. *Q* sei ein Punkt, der nicht zu *g* gehört. *A* sei ein weiterer Punkt, der zu *g* gehört.

Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten *s* zu *g* durch den Punkt *P*:

Wir betrachten die Halbebene gQ^+. Nach Axiom W/2 gibt es jetzt in gQ^+ genau einen Strahl *h* mit dem Anfangspunkt *P* derart, dass $|\angle PA^+h| = 90$ gilt.
Die Gerade, die durch *h* und seinen entgegengesetzten Strahl gebildet wird, ist die gesuchte Senkrechte *s*. Ihre Eindeutigkeit ergibt sich aus der Eindeutigkeit des Strahls *h*.