Mathematische Grundlagen der Physik

Michael Gieding

Schuljahr 2023/24

1 Mathematische Grundlagen der Physik

1.1 Grundlagen

1.1.1 Für die Physik wichtige Sätze der Schulmathematik

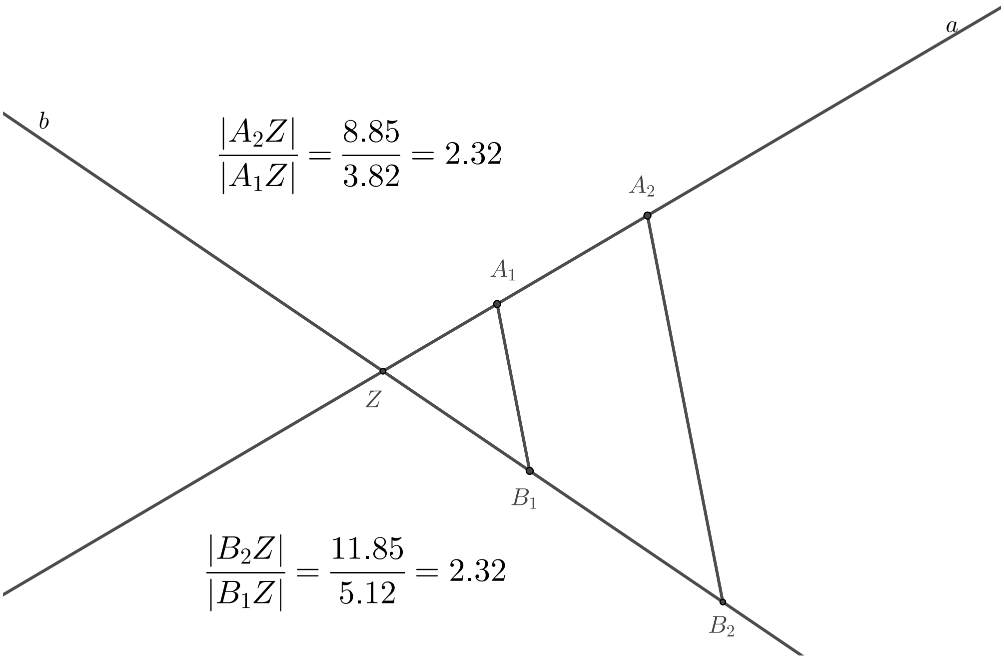
Die Strahlensätze

Der erste Strahlensatz

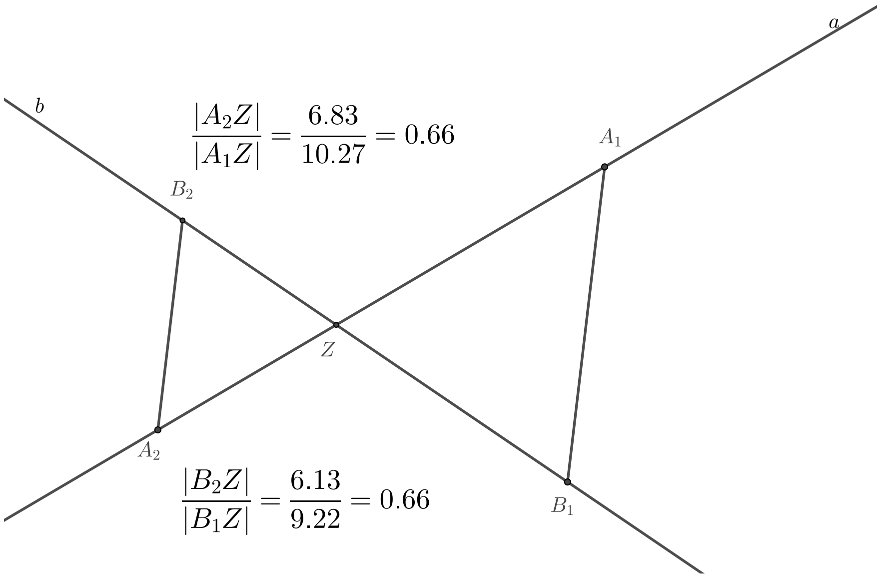
Satz 1.1.1

Erster Strahlensatz
Es seien a und b zwei Geraden, die sich in genau dem Punkt Z schneiden. Auf a seien die Punkte A_1 und A_2 gegeben. Auf b seien die Punkte B_1 und B_2 gegeben.

$$A_1B_1 \| A_2B_2 \Rightarrow \frac{|A_2Z|}{|A_1Z|} = \frac{|B_2Z|}{|B_1Z|}$$



1. Strahlensatz Fall 1



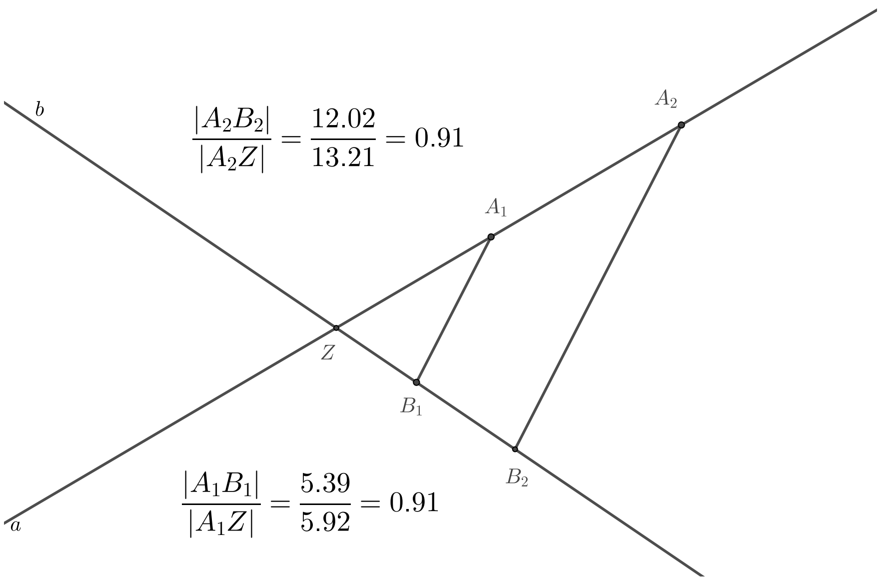
1. Strahlensatz Fall 2

Der zweite Strahlensatz

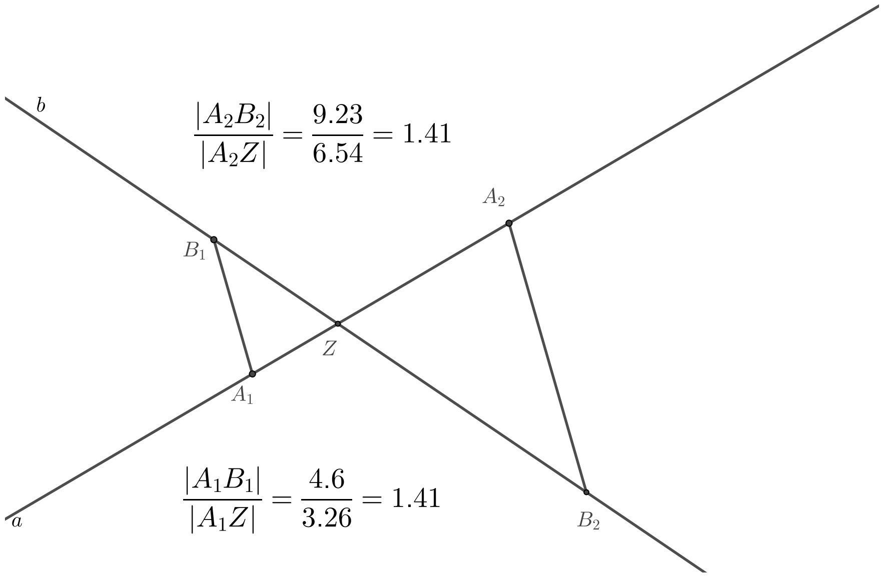
Satz 1.1.2

Zweiter Strahlensatz
Es seien a und b zwei Geraden, die sich in genau dem Punkt Z schneiden. Auf a seien die Punkte A_1 und A_2 gegeben. Auf b seien die Punkte B_1 und B_2 gegeben.

$$A_1B_1 \| A_2B_2 \Rightarrow \frac{|A_2B_2|}{|A_2Z|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_1Z|}$$



2. Strahlensatz Fall 1



2. Strahlensatz Fall 2

Umkehrung des ersten Strahlensatzes

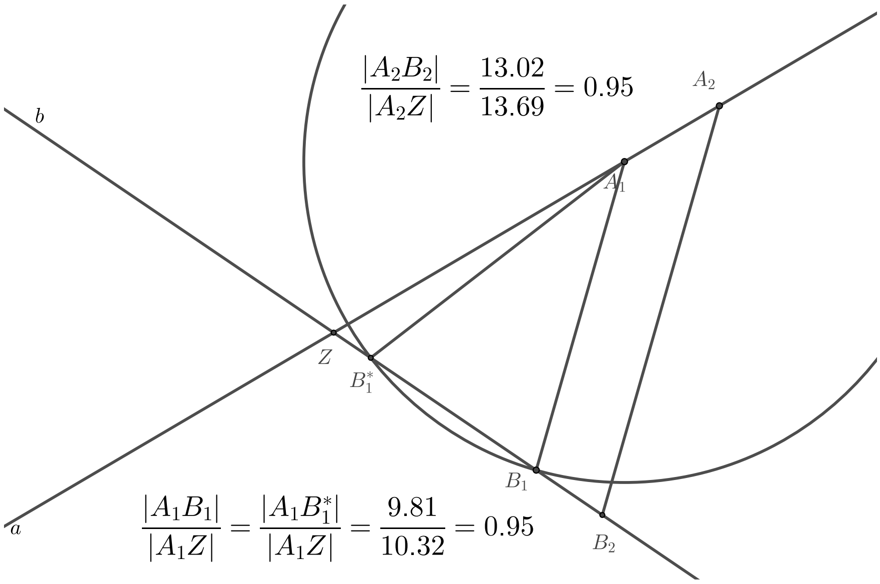
Satz 1.1.3

Umkehrung erster Strahlensatz
Es seien a und b zwei Geraden, die sich in genau dem Punkt Z schneiden. Auf a seien die Punkte A_1 und A_2 gegeben. Auf b seien die Punkte B_1 und B_2 gegeben.

$$\frac{|A_2Z|}{|A_1Z|} = \frac{|B_2Z|}{|B_1Z|} \Rightarrow A_1B_1 \| A_2B_2$$

Umkehrung des zweiten Strahlensatzes

Die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes gilt nicht in jedem Fall wie die folgende Skizze zeigt:



die Umkehrung des 2. Strahlensatzes gilt nicht

Ähnlichkeit von Dreiecken

Definition 1.1.1

Ähnlichkeit von Dreiecken
Zwei Dreiecke sind ähnlich zueinander, wenn sie in zwei Innenwinkeln übereinstimmen.

$$\overline{ABC} \sim \overline{A'B'C'} :\Leftrightarrow \angle CAB \cong \angle C'A'B' \wedge \angle ABC \cong \angle A'B'C'$$

Entsprechend des Innenwinkelsatzes stimmen die ähnliche Dreiecke damit in allen Winkeln überein. Unmittelbar einsichtig ist der folgende Satz für rechtwinklige Dreiecke.

Satz 1.1.4

Ähnlichkeit von rechtwinkligen Dreiecken
Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich,
wenn sie in einem weiteren Innenwinkel übereinstimmen.

Die Kongruenz von Dreiecken ist ein Spezialfall der Ähnlichkeit von Dreiecken. Wenn zwei Dreiecke kongruent zueinander sind, dann sind sie auch ähnlich zueinander. Kongruente Dreiecke stimmen in allen Innenwinkeln und in allen Seiten überein. Dementsprechend gilt für zwei kongruente Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{A'B'C'}$ dass die Seitenlängenverhältnisse in beiden Dreiecken gleich sind. a, b, c und $a', b'c'$ seien die schulüblichen Bezeichnungen der Seiten der beiden kongruenten Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{A'B'C'}$. Dann gilt:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \wedge \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \wedge \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Wenn die beiden Dreiecke nicht mehr kongruent aber immer noch ähnlich zueinander sind bleibt die Gültigkeit dieser Verhältnisgleichungen erhalten:

Satz 1.1.5

Seitenverhältnisse in ähnlichen Dreiecken
Es seien $\overline{ABC}$ und $\overline{A'B'C'}$ zwei Dreiecke mit den schulüblichen Bezeichnungen.

$$\overline{ABC} \sim \overline{A'B'C'} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \wedge \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \wedge \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Es seien $\overline{ABC}$ und $\overline{A'B'C'}$ zwei ähnliche Dreiecke mit den schulüblichen Bezeichnungen.

Voraussetzung:

V1: $\alpha \cong \alpha'$

V2: $\beta \cong \beta'$

V3: $\gamma \cong \gamma'$

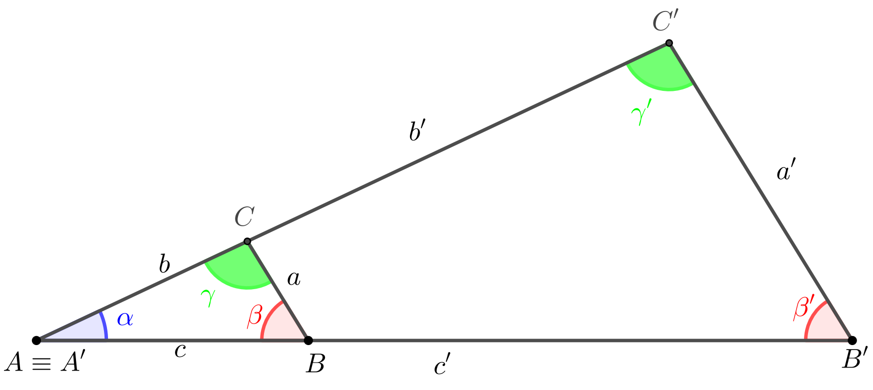
Behauptung:

B1: $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$

B2: $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$

B3: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

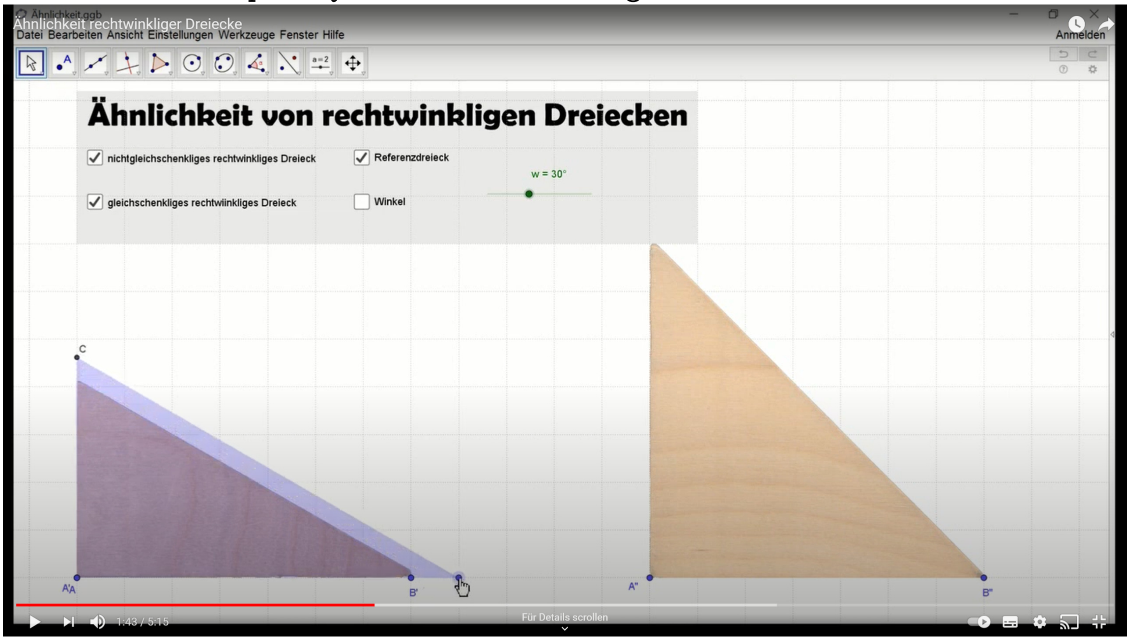
Beweis:
Wegen der Winkelgleichheit lassen sich die beiden Dreiecke wie folgt anordnen:



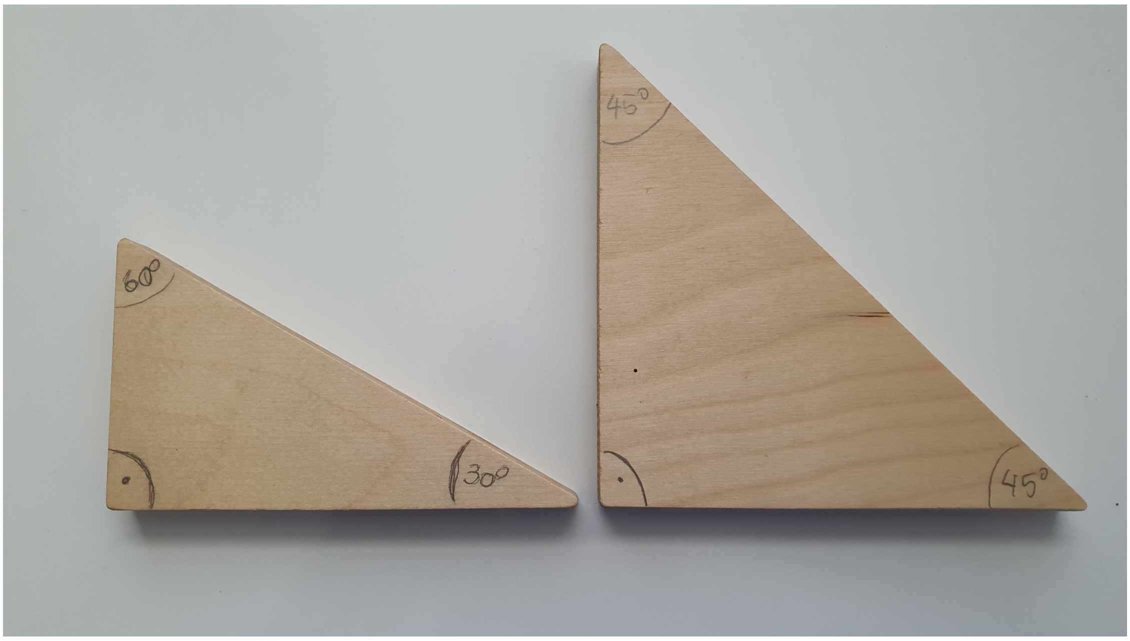
Wegen $\beta \cong \beta'$ gilt nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes $BC \| B'C'$. Die zu beweisenden Seitenverhältnisse liefern jetzt die Strahlensätze.

Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken

Auf Youtube: `https://youtu.be/Pih106srbg8`



Hinsichtlich der Ähnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke braucht man nur nach einem weiteren kongruenten Innewinkel der Dreiecke suchen. Entsprechend Defintion **??** sind etwa alle rechtwinkligen Dreiecke mit einem Innenwinkel der der Größe 30° ähnlich zueinander. Die folgende Abbildung zeigt die beiden Prototypen rechtwinkliger Dreiecke, wie sie zum Konstruieren in der Schule verwendet werden:



Wenn auch die konkreten Realisierungen dieser Dreieckstypen verschiedene Größen aufweisen können, so stimmen sie doch in den Verhältnissen ihrer Seiten überein. Konkret berechnen sich diese Verhältnisse wie folgt:

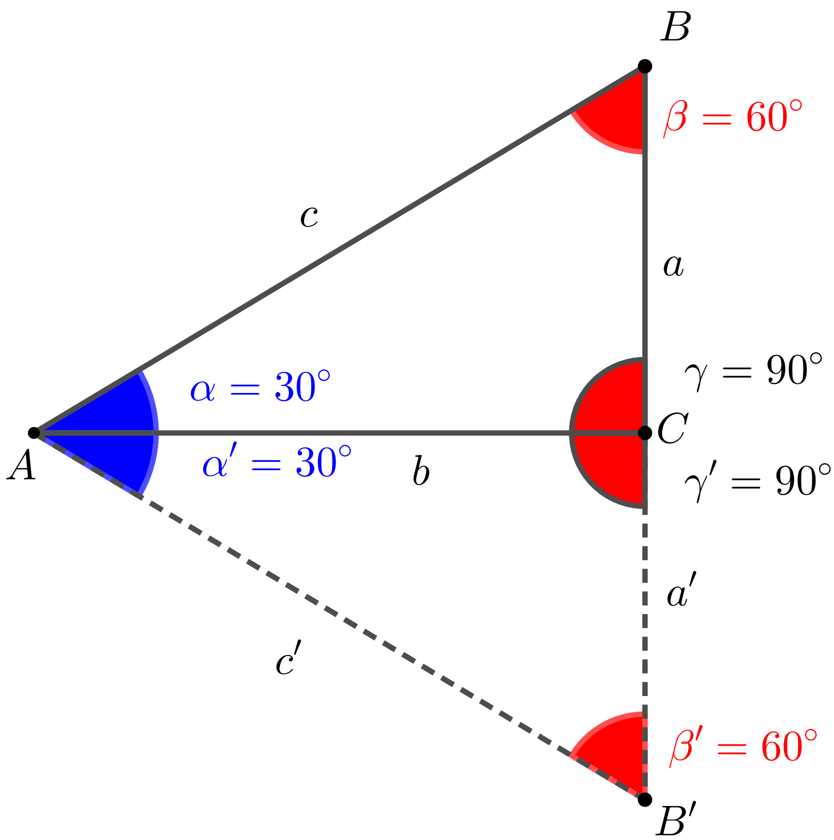
gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck:

Es sei $\overline{ABC}$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Die Seite c ist dann die Hypotenuse dieses Dreiecks und die beiden Katheten a und b haben dieselbe Länge. Nach dem Basiswinkelsatz sind die beiden Basiswinkel gleichgroß und haben damit die Größe 45°. Das Verhältnis der Kathetenlängen zur Länge der Hypotenuse beträgt für dieses Dreieckstyp unabhängig von der Größe des jeweiligen Dreiecks $\frac{1}{2}\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= c^2 && \text{Pythagoras} \\ 2a^2 &= c^2 && \text{gleischenkliges Dreieck} \\ a &= \frac{1}{2}\sqrt{2}c \\ \frac{a}{c} &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

rechtwinkliges Dreieck mit den Innenwinkeln $30°$ und $60°$

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen und den folgenden Innenwinkelgrößen: $\alpha = 30°, \beta = 60°, \gamma = 90°$



Wir spiegeln das Dreieck $\overline{ABC}$ an der Geraden AB. Im Dreieck $\overline{AB'B}$ haben dann alle Innenwinkel die Größe 60°. Aus diesem Grund ist das Dreieck $\overline{AB'B}$ gleichseitig und es gilt: $c = 2a$. Damit lassen sich folgende Seitenverhältnisse berechnen:

Das Verhältnis $\frac{a}{c}$:

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

Das Verhältnis $\frac{b}{c}$:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\left(\frac{1}{2}c\right)^2 + b^2 = c^2$$
$$b = \sqrt{\frac{4c^2 - c^2}{4}}$$
$$b = \frac{c}{2}\sqrt{3}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck

Durch die Angabe eines weiteren Innenwinkels eines rechtwinkligen Dreiecks ist das Dreieck bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt. Damit ist das Verhältnis der dem gegebenen Winkel gegenüberliegenden Kathete (Gegenkathete) zur Hypotenuse für alle diese Dreiecke gleich. Man nennt dieses Verhältnis den Sinus des gegebenen Winkels. Das Verhältnis der anderen Kathete (Ankathete) zur Hypotenuse nennt man den Kosinus des gegebenen Winkels.

Definition 1.1.2

Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck
Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen. Der Winkel γ sei ein Rechter. Unter dem Sinus von α versteht man den Quotienten $\frac{a}{c}$ unter dem Kosinus von α versteht man den Quotienten $\frac{b}{c}$:

$$\sin\alpha := \frac{a}{c}, \cos\alpha := \frac{b}{c}$$

Der Tangens von α ist der Quotient aus $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$:

$$\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Entsprechend unserer Überlegungen zu speziellen rechtwinkligen Dreicken ergeben sich die folgenden speziellen Werte:

Satz 1.1.6

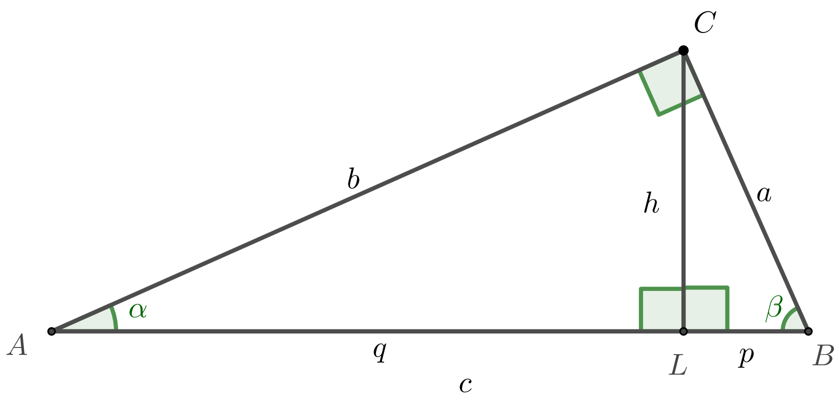
Sinus, Kosinus, Tangens spezieller Winkel

- $\sin 30° = \frac{1}{2}, \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
- $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \tan 45° = 1$

- $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \cos 60° = \frac{1}{2}, \tan 60° = \sqrt{3}$

Die Satzgruppe des Pythagoras

Jedes rechtwinklige Dreieck wird durch die Höhe auf die Hypotenuse in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt, die jeweils zum Ausagangsdereieck und damit auch untereinander ähnlich sind:



- $\overline{ABC} \sim \overline{ALC}$: Beide Dreiecke sind rechtwinklig und haben α gemeinsam. Damit ist $\beta \cong \angle ACL$
- $\overline{ABC} \sim \overline{BLC}$: Beide Dreiecke sind rechtwinklig und haben β gemeinsam. Damit ist $alpha \cong \angle BCL$

Damit gilt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{p}{a} \tag{1.1}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{q}{b} = \frac{h}{a} \tag{1.2}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{q}{b} = \frac{h}{a} \tag{1.3}$$
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{h}{b} = \frac{p}{a} \tag{1.4}$$

Mittels dieser Verhältnisgleichungen lassen sich jetzt der Kathetensatz, der Höhensatz und der Satz des Pythagoras beweisen.

Satz 1.1.7

Kathetensatz
Es sei $\overline{ABC}$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Ansonsten mögen schulüblich Bezeichnungen gelten. $\overline{AL}$ sei der Hypotenusenabschnitt q und $\overline{LB}$ der Hypotenusenabschnitt p. $h = \overline{CL}$ sei die Höhe des Dreiecks auf die Hypotenuse $c = \overline{AB}$.

Dann gilt:

$$a^2 = p \cdot c \tag{1.5}$$
$$b^2 = q \cdot c \tag{1.6}$$

Beweis: Die beiden Gleichungen folgen unmittelbar aus **??** und **??**.

Satz 1.1.8

Höhensatz
Es sei $\overline{ABC}$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Ansonsten mögen schulüblich Bezeichnungen gelten. $\overline{AL}$ sei der Hypotenusenabschnitt q und $\overline{LB}$ der Hypotenusenabschnitt p. $h = \overline{CL}$ sei die Höhe des Dreiecks auf die Hypotenuse $c = \overline{AB}$.
Dann gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$

Beweis:

$$\frac{h}{b} = \frac{p}{a} \qquad \textbf{??} \tag{1.7}$$
$$\frac{h}{a} = \frac{q}{b} \qquad \textbf{??} \tag{1.8}$$
$$\frac{h^2}{a \cdot b} = \frac{p \cdot q}{a \cdot b} \qquad \textbf{??} \text{ und } \textbf{??} \text{ multiplizieren} \tag{1.9}$$
$$h^2 = p \cdot q \tag{1.10}$$

Satz 1.1.9

Satz des Pythagoras
Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen.
Wenn der Winkel bei C ein Rechter ist, dann gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beweis:

$$a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c \qquad \textbf{??} \text{ und } \textbf{??} \text{ addieren} \tag{1.11}$$
$$a^2 + b^2 = c \cdot (p + q) \tag{1.12}$$
$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad p + q = c \tag{1.13}$$

Satz 1.1.10

Trigonometrischer Pythagoras
Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen.

Wenn der Winkel bei C ein Rechter ist, dann gilt

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

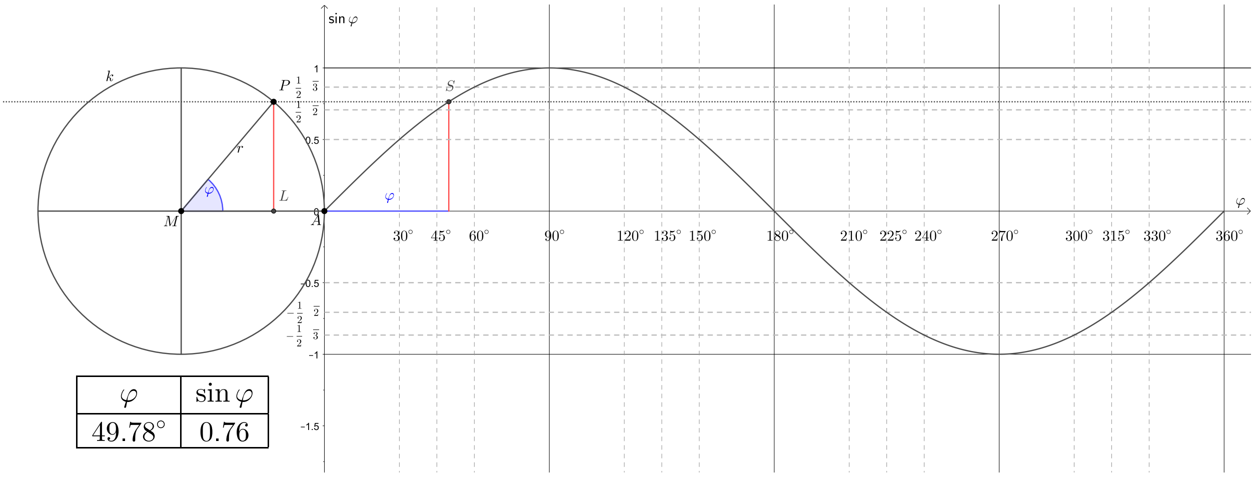
Beweis:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{Definition ??} \tag{1.14}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \text{Definition ??} \tag{1.15}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} \tag{1.16}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{b^2}{c^2} \tag{1.17}$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \tag{1.18}$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2+b^2}{c^2} \tag{1.19}$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{c^2}{c^2} = 1 \quad \text{Satz des Pythagoras} \tag{1.20}$$

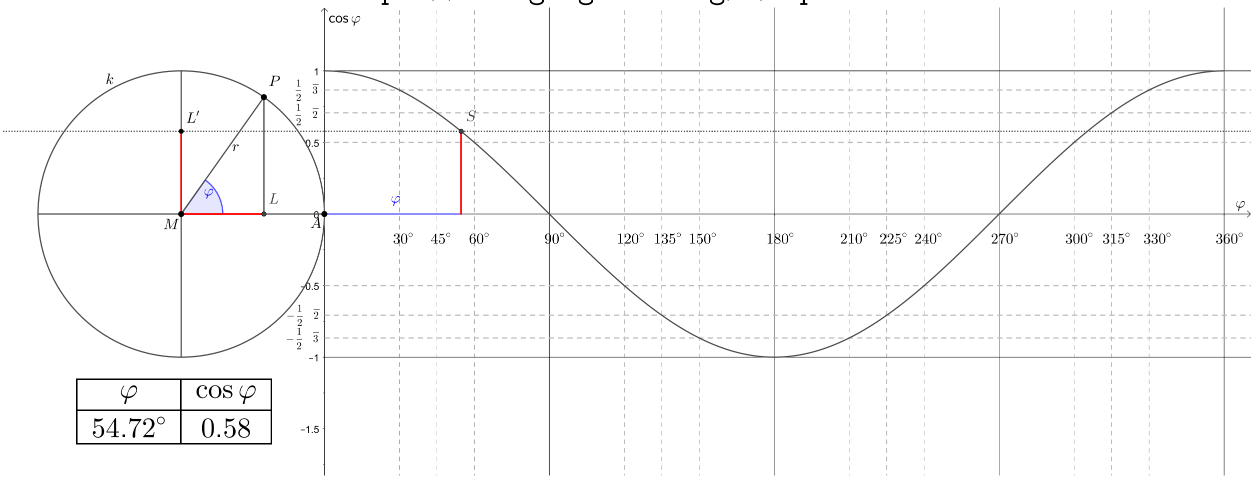
Sinus und Kosinus am Einheitskreis im Kontext von Winkeln in Gradmaß

Entsprechend der Winkelsumme im Dreieck sind in einem rechtwinkligen Dreieck die anderen Innenwinkel jeweils kleiner als ein rechter Winkel. Trotzdem lässt sich für jeden Winkel $\varphi \geq 90°$ der Sinus und der Kosinus bestimmen. Hierzu betrachten wir φ im Kontext eines Einheitskreises. Es sei k ein Einheitskreis mit dem Mittelpunkt M. Wir zeichnen eine Gerade MA mit $A \in k$ aus. Dann existiert zu jeder Winkelgröße $0 \leq \varphi < 360°$ genau ein Punkt $P \in k$ mit $|\angle AMP| = \varphi$. Umgekehrt bestimmt jeder Punkt $P \in k$ genau einen Winkel $\angle AOP$ mit $0 \leq |\angle AMP| < 360°$. L sei der Fußpunkt des Lotes von P auf MA. Wenn $0 < \varphi = |\angle AMP| < 90°$ dann ist $\overline{LMP}$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei L. Entsprechend Definition **??** berechnen sich der Sinus Kosinus von φ wie folgt:

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{PL}|}{|\overline{MP}|} = \frac{|\overline{PL}|}{1} = |\overline{PL}| \tag{1.21}$$
$$\cos\varphi = \frac{|\overline{ML}|}{|\overline{MP}|} = \frac{|\overline{ML}|}{1} = |\overline{ML}| \tag{1.22}$$



Sinus am Einheitskreis: `https://www.geogebra.org/m/eqmkt236`

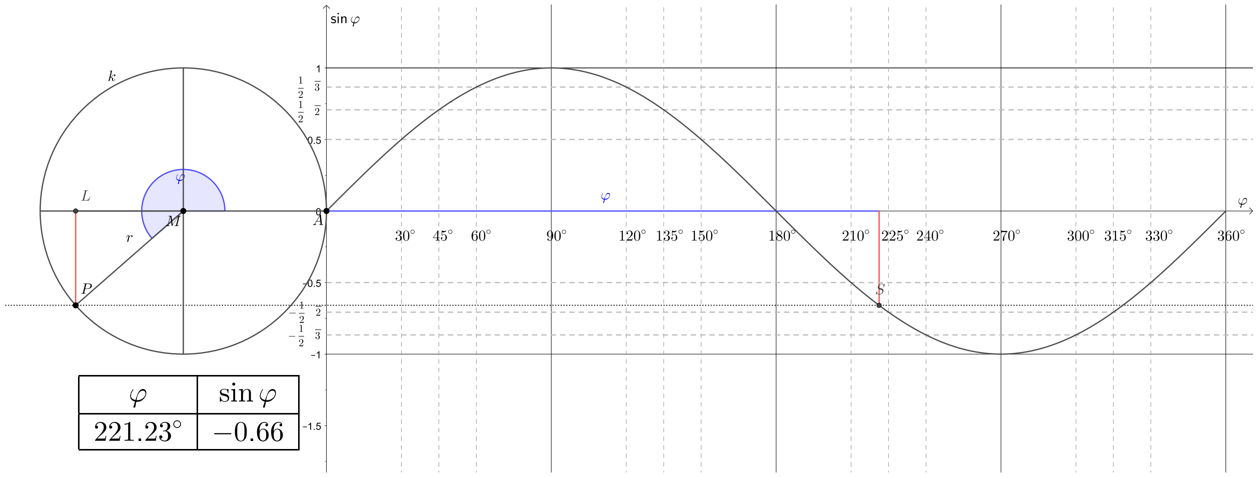


Kosinus am Einheitskreis: `https://www.geogebra.org/m/jc3tjxvp`
Hinweis: Für die Darstellung der Kosinusline wurde $\overline{ML}$ gespiegelt.
Für den Fall $0° < \varphi < 90°$ betrachten wir Sinus und Kosinus wie bisher in den rechtwinkligen Dreiecken. Die Berechnungen vereinfachen sich durch die Hypotenuse der Länge 1. Die Hypotenuse ist jeweils ein Radius des Einheitskreises k. Für $\varphi \geq 90°$ ist das Dreieck $\overline{AMP}$ kein rechtwinkliges Dreieck und entsprechend unserer bisherigen Definition von Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck würde $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ nicht existieren. Ein Ausweg ist eine neue Definition dieser Werte durch eine analoge Weiterführung der Erkenntnisse für $0° < \varphi < 90°$: Auch für die Winkelgrößen, denen wir bisher noch keinen Sinus- bzw. Kosinuswert zuordnen konnten legen wir fest, dass $\sin\varphi = |\overline{PL}|$ und $\cos\varphi = |\overline{ML}|$ gilt. Die Strecken $\overline{ML}$ und $\overline{PL}$ verstehen wir dabei als gerichtete Strecken, dh. es gilt:

$90° \leq \varphi \leq 180°$: $0 \leq |\overline{PL}| \leq 1, 0 \geq |\overline{ML}| \geq -1$

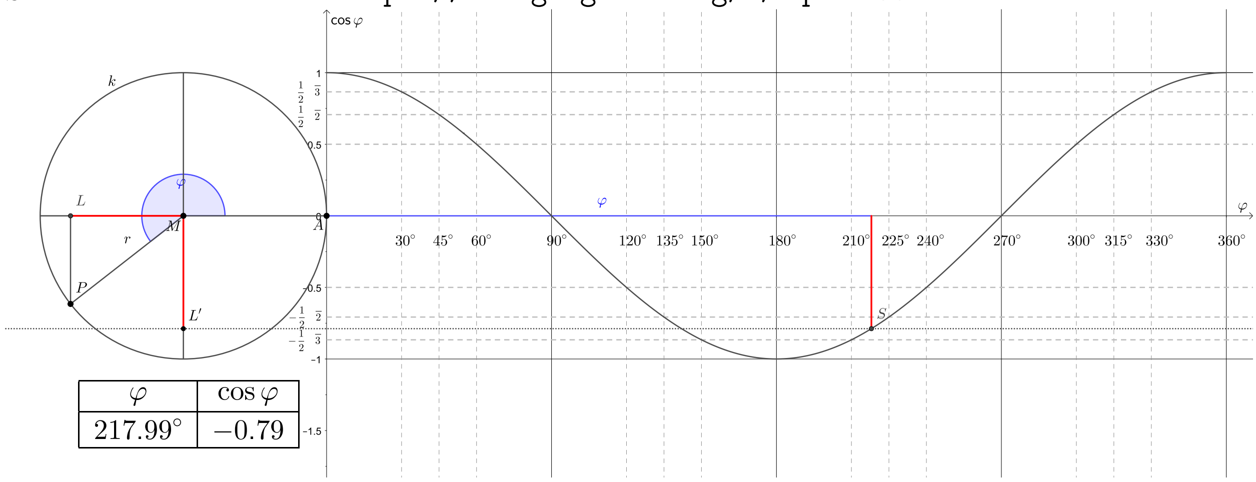
$180° \leq \varphi \leq 270°$: $0 \geq |\overline{PL}| \geq -1, 0 \geq |\overline{ML}| \geq -1$

$270° \leq \varphi \leq 360°$: $0 \geq |\overline{PL}| \geq -1, 0 \leq |\overline{ML}| \leq 1$



φ	$\sin\varphi$
221.23°	−0.66

Sinus am Einheitskreis: `https://www.geogebra.org/m/eqmkt236`



φ	$\cos\varphi$
217.99°	−0.79

Kosinus am Einheitskreis: `https://www.geogebra.org/m/jc3tjxvp`

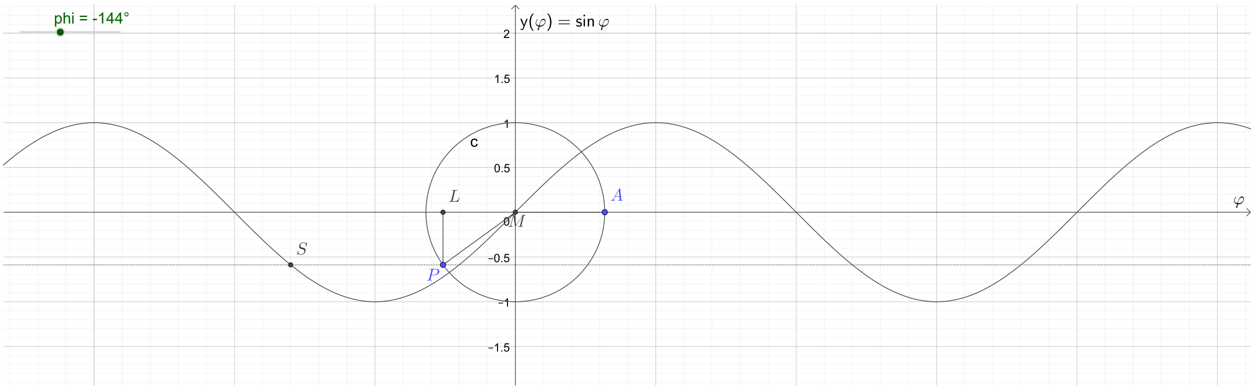
Einfacher wird die Definition der Winkelfunktionen wenn wir den Einheitskreis in Mittelpunktslage bzgl. eine kartesischen Koordinatensystems betrachten. Wir vervollständigen dabei gleichzeitig die Betrachtungen für beliebige gerichtete Winkel.

Definition 1.1.3

Sinus und Kosinus als Funktionen beliebiger Winkelgrößen
Es sei k ein Einheitskreis in Mittelpunktslage bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems mit dem Koordinatenursprung M. Der Punkt A habe die Koordinaten $(1,0)$. φ sei eine beliebige reelle Zahl in Gradmaß. $P = (x_P, y_P)$ sei ein Punkt von k mit $\measuredangle AMP = \varphi$ (gerichteter Winkel). Dann gilt:

$$\sin\varphi := x_P$$

$$\cos\varphi := y_P$$



https://www.geogebra.org/m/nummsyax

Bogenmaß

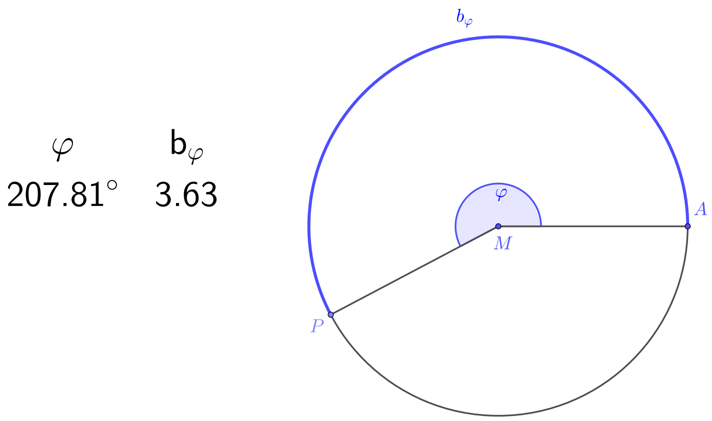
Es sei k ein Einheitskreis mit dem Mittelpunkt M und einem ausgezeichneten Punkt A. G sei die Menge aller Winkelgrößen zwischen 0° und 360°.

$$G := \{\varphi |\ 0° < \varphi \leq 360°\}$$

K sei die Menge aller Punkte von k. Wir definieren eine Abbildung f von G auf K wie folgt:

$$\forall \varphi \in K : f(\varphi) := P, P \in K \wedge \angle AMQ = \varphi$$

f ist bijektiv. Zu jedem Punkt P auf k existiert genau eine Winkelgröße aus G. Darüber hinaus bestimmt jeder Punkt P von k genau einen Bogen $b_\varphi \subset k$. Es ist dieses der Bogen von A nach P.



https://www.geogebra.org/m/wqg4bkpu

Da jeder Punkt $P \in k$ bzgl. f genau ein Urbild in G hat ordnen wir durch die Bögen jeder Winkelgröße φ genau eine Bogenlänge b_φ zu. Im Folgenden leiten wir die Abbildungsvorschrift algebraisch her:
Wenn P mit A zusammenfällt, hat P für alle entsprechenden Winkelgrößen φ den Kreis k einmal durchlaufen:

φ	b_φ	Berechnung	Bemerkung
$360°$	2π	$u = 2\pi r$	Kreisumfang
$180°$	π	$\frac{u}{2}$	Die Hälfte vom Kreisumfang
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{u}{4}$	Ein Viertel vom Kreisumfang
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{u}{8}$	Ein Achtel vom Kreisumfang

Offenbar sind φ und b_φ proportional zueinander. Dementsprechend lässt sich die folgenden Abbildungsvorschrift entwickeln:

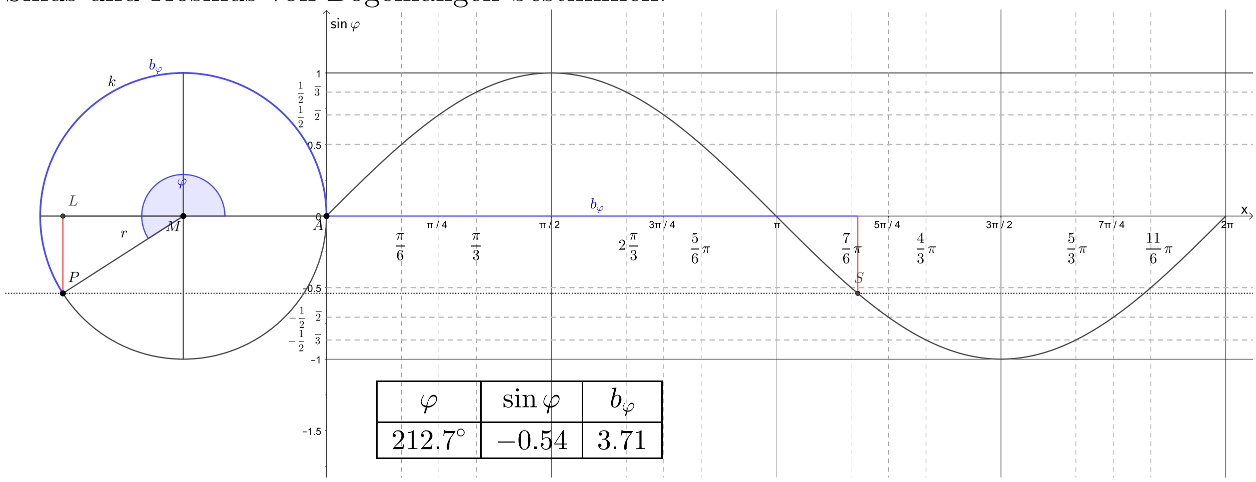
$$\frac{b_\varphi}{\varphi} = \frac{\pi}{180°} \tag{1.23}$$

$$b_\varphi = \frac{\pi}{180°} \cdot \varphi \tag{1.24}$$

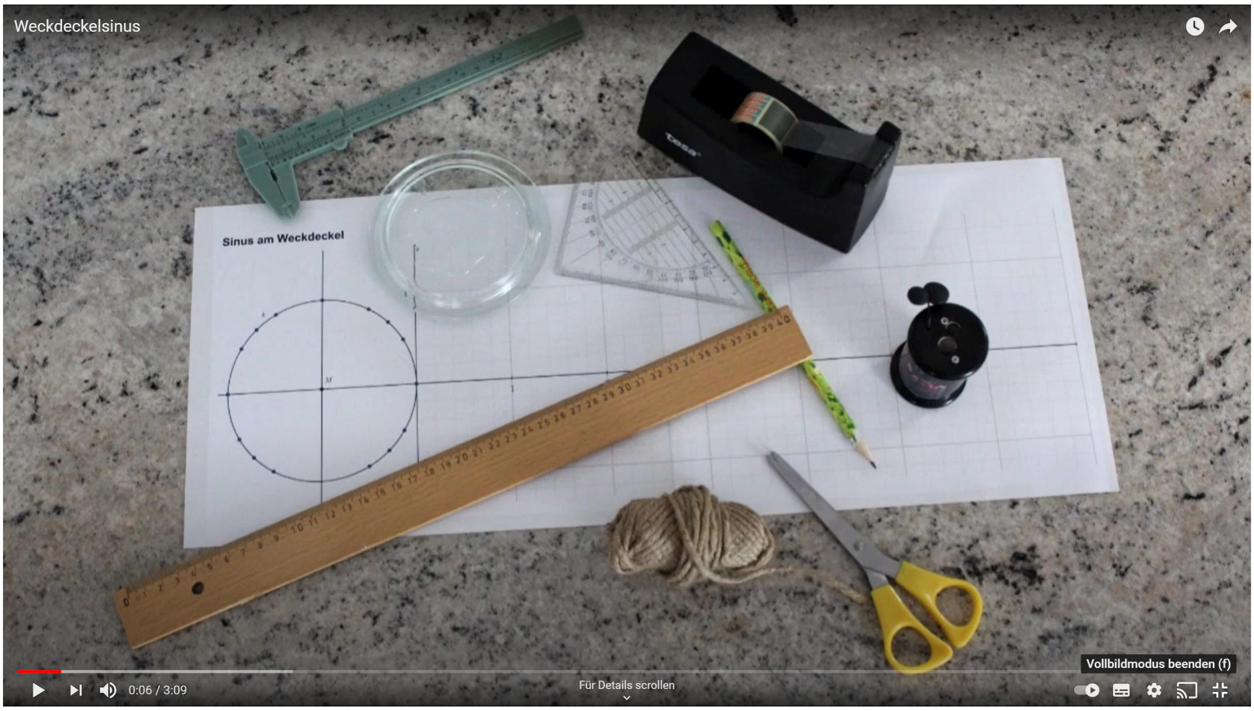
Gleichung **??** lässt sich auch auf Winkelgrößen von $-\infty$ bis ∞ anwendend. Bildlich gesprochen vollführt der Punkt P auf dem Einheitskreis k mehrere Umdrehungen und wir unterscheiden auch, ob sich P mathematisch postiv um M dreht oder im Uhrzeigersinn mathematisch negativ. Bei mathematisch negativem Drehsinn ist die überstrichene Winkelgröße negativ. Damit haben wir durch Gleichung **??** eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$, von der Menge aller Winkelgrößen in Gradmaß auf die Menge aller Winkelgrößen in Bogenmaß.

Sinus und Kosinus im Kontext von Winkeln in Bogenmaß

Da zu jedem (gerichteten) Winkel in Gradmaß genau eine (gerichtete) Bogenlänge gehört und diese abbildung darüber hinaus umkehrbar eindeutig ist, können wir auch die Größen Sinus und Kosinus von Bogenlängen bestimmen.



Zum experimentieren: `https://www.geogebra.org/m/bcbw3jz8`
Als Video auf YT: `https://youtu.be/Cut6AVrB7U8`


Weckdeckelsinus
Sinus am Weckdeckel
0:06 / 3:09
Für Details scrollen
Vollbildmodus beenden (f)