1 Potenzgesetze

1.1 Exponent ist eine natürliche Zahl

Aufgabe 1

Schreibe die folgenden Terme kürzer und berechne den Wert der Terme ohne Taschenrechner
Beispiele:

- $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$
- $5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5 = 15$

a) $15 \cdot 15 \cdot 15 =$

b) $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 =$

c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} =$

d) $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} =$

e) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} =$

f) $\pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (zur Berechnung reicht der Überschlag mit $\pi \approx 3$)

g) $\pi + \pi + \pi + \pi + \pi = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (zur Berechnung reicht der Überschlag mit $\pi \approx 3$)

h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} =$

Aufgabe 2

Schreibe die folgenden Terme ohne Exponenten und berechne der Wert der Terme ohne Taschenrechner.
Beispiel:

- $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$

a) $0{,}5^3 =$

b) $3^3 =$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

d) $\left(\frac{3}{11}\right)^2 =$

e) $\frac{54}{3^3} =$

f) $(3 + a)^3 =$

g) $\frac{0{,}25^2}{0{,}125} =$

h) $\frac{4}{3}\pi 5^3 =$ $(\pi \approx 3)$

Aufgabe 3

Schreibe zunächst ohne Potenzen und fasse dann mit nur einem einzigen Exponenten zusammen.
Beispiel:

- $(a^2)^3 = (a \cdot a)^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot a \cdot a = a^6$

a) $(x^3)^2 =$

b) $x^{(3)^2} =$

c) $a^3 \cdot a^5 =$

d) $a^2 \cdot (a^5)^2 =$

e) $(a + b)^3 \cdot (a + b)^5$

Aufgabe 4

Mathematik ist eine exakte Wissenschaft. Alles, was behauptet wird, muss auch bewiesen werden.
Beispiel:
Behauptung: $a^3 \cdot a^2 = a^5$
Beweis:$a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ Beweise die folgenden Aussagen:

a) $a^2 \cdot a^4 = a^6$

b) $x^4 \cdot x^2 = x^6$

c) Für alle natürlichen Zahlen m und n und für jede reelle Zahl a gilt: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

d) $(a^3)^3 = a^9$

e) $a^{3^3} = a^{27}$

f) Für alle natürlichen Zahlen m und n und jede reelle Zahl a gilt: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

g) $a^3 \cdot b^3 = ab^3$

h) Für jede natürliche Zahl n und für alle reellen Zahlen a und b gilt: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

Aufgabe 5

Typische Fehler! Kennzeichne alle falschen Gleichungen:

a) $5^3 \cdot 4^2 = 20^5$

b) $(a + b)^3 = a^3 + b^3$

c) $a^3 \cdot a^5 = a^8$

d) $a^3 \cdot a^5 = a^1 5$

e) $(a^4)^2 = a^6$

1.2 Exponent ist eine negative ganze Zahl

Aufgabe 6

Inverse Zahlen (bezüglich der Multiplikation):

a) Das Inverse der Zahl 2 ist die Zahl $\frac{1}{2}$ denn $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Man schreibt $\frac{1}{2} = 2^{-1}$.

b) Das Inverse der Zahl 9 ist die Zahl ...

c) Das Inverse der Zahl 5^2 ist die Zahl $\frac{1}{5^2}$ denn $5^2 \cdot \frac{1}{5^2} = 1$. Man schreibt $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$.

d) Das Inverse der Zahl 7^3 ist die Zahl ...

e) Das Inverse der Zahl a ist die Zahl ...

f) Das Inverse der Zahl a^2 ist die Zahl ...

g) Es sei n eine natürliche Zahl. Das Inverse der Zahl a^n ist die Zahl ...

Aufgabe 7

Inverse Zahlen bezüglich der Multiplikation bestimmen.
Gib jeweils das Inverse der folgenden Zahlen an:

a) 0,25

b) $-0{,}25$

c) π

d) $\sqrt{2}$

e) -5

f) $-\sqrt{3}$

Aufgabe 8

Beweise: (Hinweis: Du musst zeigen, dass die linke Seite der Gleichung mal die rechte Seite der Gleichung 1 ergibt.

a) $-0{,}25^{-1} = -4$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$

d) $0{,}125^{-1} = 8$

e) $1{,}25\%^{-1} = 8$

f) $(1^{-1})^{-1} = 1^{-1} = 1$

g) $0{,}9^{-1} = 0{,}\overline{1}$

h) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

Aufgabe 9

Ergänze die folgende Definition:
Definition: (Inverses bzgl. der Multiplikation)

> Es sei a eine reelle Zahl. Die inverse Zahl zu a (bzgl. der Multiplikation) ist die Zahl, für die gilt:
> Multipliziert man s mit seiner inversen Zahl, dann erhält man das Ergebnis ….
> Für die zu a inverse Zahl schreibt man kurz a^{-1}.

Aufgabe 10

Ergänze die folgende Definition:
Definition: $(a^{-n}))$

> Es seien a eine reelle Zahl und $-n$ eine negative ganze Zahl. $a^{-n} = \frac{\dots}{\dots}$.

Aufgabe 11

Schreibe mit nur einem einzigen Exponenten und berechne den Wert des Terms ohne Taschenrechner. (Brüche bleiben als Brüche stehen.)

a) $3^{-2} \cdot 3^{-3} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3^5} = 3^{-5} = \frac{1}{243}$

b) $0{,}1^{-2} \cdot 0{,}1^{-3} =$

c) $10^{-1} \cdot 10^{1} =$

d) $3^{-3} \cdot 3^{2} =$

e) Es sei $a = 5$. $a^{-2} \cdot a^{-1} =$

Aufgabe 11

Beweise!

a) $a^{-3} \cdot a^{-2} = a^{(-3)+(-2)} = a^{-5}$

b) $a^{-3} \cdot a^{2} = a^{-3+2} = a^{-1}$

c) Es seien n und m natürliche Zahlen, a sei eine reelle Zahl.

(I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
(II) $a^{-m} \cdot a^n = a^{-m+n}$
(III) $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n}$
(IV) $a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$

d) $a^{(-2)^2} = \frac{1}{a^4}$

e) Für jede ganze Zahl n gilt: $1^n = 1$

Aufgabe 12

Die Null macht mitunter Ärger! Berechne den Wert der Terme, falls es geht.

a) $5^0 =$

b) $1^0 =$

c) $0^0 =$

d) $0^5 =$

e) $0^{-1} =$

f) $0^{-17} =$

Aufgabe 13

Wir betrachten die folgende Funktion f:
Der Definitionsbereich von f ist die Menge der folgenden Zahlen:

$$D_f = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

f wird durch die folgende Funktionsgleichung eindeutig beschrieben:

$$f(x) = 2^x$$

a) Schreibe alle Wertepaare $(x|f(x))$ auf. Beispiel: für $x = 3$ erhalten wir das Wertepaar $(3|2^3) = (2|8)$.

b) Trage die Wertepaare in ein kartesisches Koordinatensaystem ein.

c) Gib den Wertebereich W_f an.

d) Wir ändern die Funktionsgleichung in $f(x) = 1^x$. Löse die Teilaufgaben a), b), c) noch einmal für die neue Funktionsgleichung.