Übungsaufgaben Einführung in die Geometrie, mathematische Grundlagen II, Serie 3 SoSe 2013

Gieding

06.05.2013 - 12.05.2013

Aufgabe 4.01

Der Innenwinkelsatz für Dreiecke sei bereits bewiesen.
Formulieren Sie einen analogen Satz für Vierecke und beweisen Sie diesen Satz.

Lösung von Aufgabe 4.01 S SoSe$_1$3

Satz: (Innenwinkelsumme in Vieecken)
In jedem Vierecke beträgt die Summe der Größen der Innenwinkel 360°.

Beweis:
Es sei $\overline{ABCD}$ ein Viereck. Wir wählen die Diagonale von $\overline{ABCD}$, die in seinem Inneren liegt. Es sei dieses o.B.d.A. die Diagonale $\overline{AC}$.
Die Innenwinkelsumme $IWS\left(\overline{ABCD}\right)$ von $\overline{ABCD}$ läßt sich jetzt wie folgt darstellen:

$$IWS\left(\overline{ABCD}\right) = (|\angle BAC| + |\angle ABC| + |\angle BCA|) + (|\angle ACD| + |\angle CDA| + |\angle DAC|)$$
$$IWS\left(\overline{ABCD}\right) = 180° + 180° (\text{Innenwinkelsumme im Dreieck})$$
$$IWS\left(\overline{ABCD}\right) = 360°$$

Aufgabe 4.02

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, die größer als 2 ist. Entwickeln Sie eine Abbildungsvorschrift, die jedem solchen n die Innenwinkelsumme des entsprechenden n-Ecks zuordnet. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Vorschrift.

Lösung von Aufgabe 4.02 S SoSe$_1$3

Die Funktion $IWS(n)$ möge jedem entsprechenden $n-$Eck seine Innenwinkelsumme zuordnen.
Es sei $n > 2$

$$
\begin{aligned}
IWS(n) &= IWS(n-1) + 180° \\
IWS(n) &= IWS(n-2) + 180° + 180° \\
IWS(n) &= IWS(n-3) + 180° + 180° + 180° \\
&... \\
IWS(n) &= IWS(3) + 180° + 180° + ... + +180° \\
IWS(n) &= (n-2) \cdot +180°
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.03

a) Wie lautet der Stufenwinkelsatz? (schauen Sie bei Bedarf in Schulbüchern nach).
b) Es seien a und b zwei nichtidentische Geraden, die durch eine dritte Gerade c jeweils in genau einem Punkt geschnitten werden. Bei diesem Schnitt entstehen die Stufenwinkel α und β. Welche der folgenden Aussagen repräsentiert den Stufenwinkelsatz bzw. ist eine zu diesem Satz äuivalente Aussage (Begründen Sie jeweils)?

1. $a||b \Rightarrow \alpha \cong \beta$
2. $\alpha \cong \beta \Rightarrow a||b$
3. $|\alpha| \neq |\beta| \Rightarrow \exists S : S \in a \wedge S \in b$
4. $a||b \Leftrightarrow \alpha \cong \beta$

Lösung von Aufgabe 4.03 S SoSe 13

a) Satz:
Wenn zwei nichidentische parallele Geraden a und b jeweils durch eine dritte Gerade c geschnitten werden, dann sind die bei diesem Schnitt entstehenden Stufenwinkel kongruent zueinander.

b) 1. Stufenwinkelsatz
   2. Umkehrung des Stufenwinkelsatzes
   3. Kontraposition des Stufenwinkelsatzes (Aus α nicht kongruent β folgt, dass die beiden Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben bzw. nicht parallel zueinender sind.)

4. Da sowohl der Stufenwinkelsatz als auch seine Umkehrung wahre Aussagen sind gilt $a||b \Leftrightarrow \alpha \cong \beta$. Diese Äquivalenz beinhaltet den Stufenwinkelsatz, sagt aber mehr aus als dieser und ist damit nicht dem Stufenwinkelsatz gleichzusetzen.

Aufgabe 4.04

Es seien A und B zwei Punktmengen. Was müssen Sie konkret zeigen, wenn Sie beweisen wollen, dass $A = B$?

Lösung von Aufgabe 4.04 S SoSe 13

$$\forall a \in A : a \in B$$
$$\forall b \in B : b \in A$$

Aufgabe 4.05

Wir gehen davon aus, dass wir der ebenen Geometrie ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt haben. Bezüglich dieses Systems definieren wir die folgenden beiden Punktmengen:

1. $A := \left\{P\left(x_P, y_P\right) | y_p = \frac{3}{4}x_p - \frac{7}{8}\right\}$
2. $B := \left\{P\left(x_P, y_P\right) | y_p = \frac{36{,}3}{48{,}4}x_p - 0,875\right\}$
   Beweisen Sie $A \cap B = A$.

Lösung von Aufgabe 4.05 S SoSe 13

zu zeigen: $\forall P \in A : P \in B$

(I) Sei $P\left(x, y\right) \in A$

(II) $P\left(x, y\right) \in A \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}$ (Definition der Menge A)

(III) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 121}{4 \cdot 121} = \frac{\frac{3 \cdot 121}{10}}{\frac{4 \cdot 121}{10}} = \frac{36{,}3}{48{,}4}$ (elementares Rechnen)

(IV) $\frac{7}{8} = 0,875$ (elementares Rechnen)

(V) $\frac{3}{4}x - \frac{7}{8} = \frac{36{,}3}{48{,}4}x - 0,875$ ((III), (IV))

(VI) $y = \frac{36{,}3}{48{,}4}x - 0,875$ ((V), (II))

(VII) $P(x, y) \in B$ ((VI), Definition von B)

Aufgabe 4.06

Sie dürfen davon ausgehen, dass für jedes Dreieck gilt: Der größeren zweier Seiten liegt der größere Innenwinkel gegenüber.
(o.B.d.A.: $a > b \Rightarrow |\alpha| > |\beta|$) Formulieren Sie die Umkehrung dieser Seiten-Winkel-Beziehung und beweisen Sie diese Umkehrung mittels eines Widerspruchsbeweises.
(Der Basiswinkelsatz sei auch schon bewiesen.)

Lösung von Aufgabe 4.06 S SoSe 13

Es seien a und b die Seiten eines Dreiecks. Der Seite a möge der Winkel α und der Seite b der Winkel β gegenüberliegen. Die Umkehrung der obigen Implikation lautet: Dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber bzw.
$|\alpha| > |\beta| \Rightarrow |a| > |b|$

- **Voraussetzung:**
  $|\alpha| > |\beta|$
- **Behauptung:**
  $|a| > |b|$
- **Annahme:**
  $|a| \leq |b|$
- **Beweis:**
  1. Fall: $|a| = |b|$
     In diesem Fall wären nach dem Basiswinkelsatz die beiden Winkel α und β kongruent zueinander, was ein Widerspruch zur Voraussetzung wäre.
  2. Fall: $|a| < |b|$
     In diesem Fall wäre nach der bereits bewiesenen Seiten-Winkel-Beziehung (Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.) der Winkel α kleiner als der Winkel β. Auch dieses wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung $|\alpha| > |\beta|$.

Aufgabe 4.07

Definieren Sie den Begriff der Parallelität für Geraden. (Hinweis: Der Mathematiker hat sehr großes Interesse daran, dass die Relation parallel auf der Menge aller Geraden reflexiv ist, d.h. dass jede Gerade zu sich selbst parallel ist.)

Lösung von Aufgabe 4.07 S SoSe 13

Definition 1 (*Parallelität auf der Menge der Geraden*)

> *Wenn zwei Geraden in ein und derselben Ebene liegen und entweder identisch oder schnittpunktfrei sind, dann sind die beiden Geraden parallel zueinander.*

Aufgabe 4.08

Gegeben seien in der Ebene ε zwei nicht identische Geraden a und b. Sowohl a als auch b mögen durch eine dritte Gerade c jeweils in genau einem Punkt geschnitten werden. Beweisen Sie: Wenn bei diesem Schnitt kongruente Stufenwinkel entstehen, dann sind a und b parallel zueinander.
Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt, indem Sie annehmen, dass a und b nicht parallel sind. Jetzt dürfen Sie den schwachen Außenwinkelsatz (Jeder Außenwinkel ist größer als jeder nichtanliegende Innenwinkel.) anwenden.

Lösung von Aufgabe 4.08 S SoSe 13

Es seien a und b zwei komplanare nichtidentische Geraden, welche durch die Gerade c jeweils in genau einem Punkt geschnitten werden. Es gelte $a \cap c = \{A\} \wedge b \cap c = \{A\}$. Ferner seien α und β ein Paar von Stufenwinkeln, dass beim Schnitt von c mit a und b entsteht.

- **Voraussetzung:**
  $\alpha \cong \beta$
- **Behauptung:**
  $a || b$
- **Annahme:**
  $\exists C : \{C\} = a \cap b$

  1. Fall: Einer der beiden Winkel α und β ist Innenwinkel von $\overline{ABC}$.
     In diesem Fall ist jeweils der andere der beiden Winkel nichtanliegender Außenwinkel und damit kann nach dem schwachen Außenwinkelsatz nicht $\alpha \cong \beta$ gelten.
  2. Fall: Keiner der beiden Winkel α und β ist Innenwinkel von $\overline{ABC}$.
     Sei o.B.d.A. β Außenwinkel von $\overline{ABC}$. Der Scheitelwinkel α' von α ist jetzt bezüglich β nichtanliegender Innenwinkel von $\overline{ABC}$. Nach dem schwachen Außenwinkelsatz gilt jetzt $|\beta| < |\alpha'|$. Nach dem Scheitelwinkelsatz git $|\alpha'| = |\alpha|$. Unter Berücksichtigung von $|\beta| < |\alpha'|$ folgt jetzt

unmittelbar, dass $|\beta| > |\alpha|$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\alpha \cong \beta$.

Aufgabe 4.09

Welchen Satz haben Sie mit Aufgabe 4.08 bewiesen?

Lösung von Aufgabe 4.09 S SoSe 13

Die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes wurde bewiesen.

Aufgabe 4.10

Der Stufenwinkelsatz, der Nebenwinkelsatz und der Scheitelwinkelsatz seien bewiesen.
Beweisen Sie jetzt den Wechselwinkelsatz und den Satz über die entgegengesetzt liegenden Winkel an geschnittenen Parallelen.

Lösung von Aufgabe 4.10S SoSe 13

Es seien a und b zwei nichtidentische komplanare Geraden, die durch die dritte Gerade c jeweils in genau einem Punkt geschnitten werden mögen. Bei diesem Schnitt mögen das Wechselwinkelpaar α und β und das Paar entgegengesetzt liegender winkel γ und δ entstehen.

- Beweis des Wechselwinkelsatzes:
  zu zeigen: $\alpha \cong \beta$
  betrachten β' scheitelwinkel von β

  (I) $\beta \cong \beta'$ (Scheitelwinkelsatz)

  (II) $\alpha \cong \beta'$ (Stufenwinkelsatz)

  (III) $\alpha \cong \beta$ (((I), (II))

- Beweis des Satzes über die entgegengesetzt liegenden Winkel:
  zu zeigen: $|\gamma| + |\delta| = 180°$
  betrachten δ' den Nebenwinkel von δ, der Stufenwinkel zu γ ist

  (I) $|\delta| + |\delta'| = 180°$ (Nebenwinkel sind supplementär)

  (II) $|\gamma| = |\delta'|$ (Stufenwinkelsatz)

  (III) $|\gamma| = |\delta|$ ((I), (II))