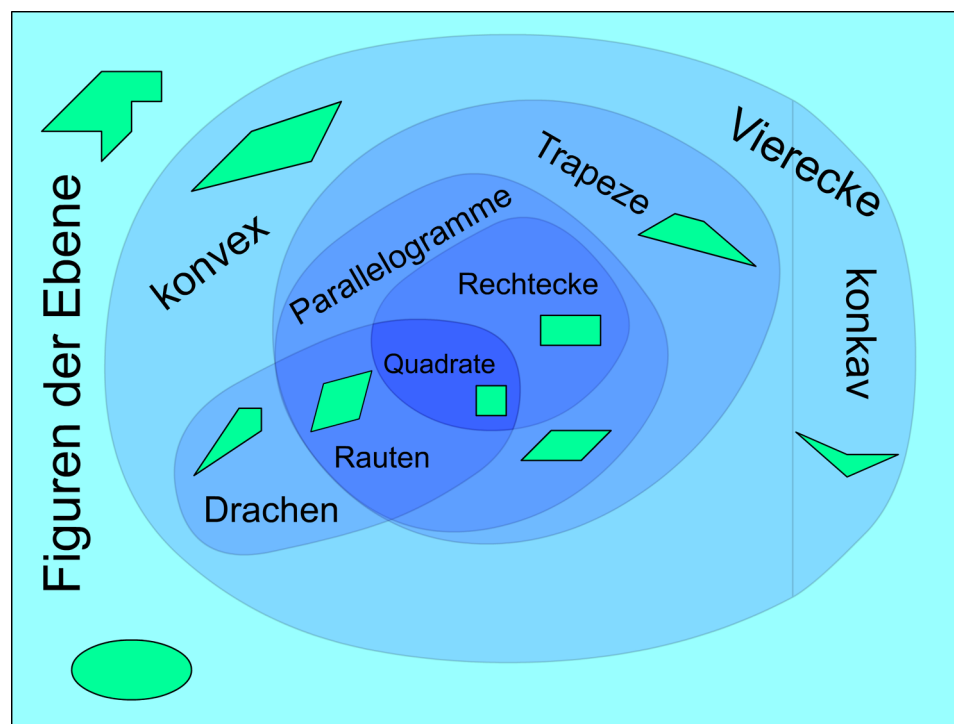


Kapitel 2

Erarbeiten von Begriffen



1 Begriffe im Geometrieunterricht der SI

1.1 Objekte und Relationen

1.1.1 Figuren und Körper (Figurenbegriffe)

1.1.1.1 elementare bzw. einfache Grundobjekte	
Objekte	Relationen
„elementare“ Grundobjekte Punkt, Gerade, Ebene, Halbgerade (Strahl), Winkel, Strecke, Halbebene, Schnittpunkt, Schnittgerade	P liegt auf g, P ist ein Punkt von ..., p ist parallel zu g, p ist windschief zu g, p steht senkrecht auf g, p steht senkrecht auf ε, P liegt zwischen A und B, kollinear, komplanar, Strecke a ist zu Strecke b gleichlang (kongruent)
Schnittfiguren von Geraden Zwei Geraden: Nebenwinkel, Scheitelwinkel Drei Geraden: Stufenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzt liegende Winkel.	α ist Nebenwinkel zu β, α ist Scheitelwinkel von β, α ist Stufenwinkel zu β, α ist Wechselwinkel zu β, α ist entgegengesetzt liegender Winkel zu β,
Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende	M ist Mittelpunkt der Strecke AB

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

1 Begriffe im Geometrieunterricht der SI, 1.1 Objekte und Relationen, 1.1.1 Figuren und Körper (Figurenbegriffe),

1.1.1.2 Figuren		
Objekte		Relationen
„geradlinig“ begrenzt	„krummlinig“ begrenzt	
Polygone (Vielecke) Polygongrundbegriffe: Ecke, Seite, Innenwinkel, Außenwinkel, Diagonale, konvexes (nichtkonvexes) Polygon,	Kreise Mittelpunkt, Radius, Durchmesser, Sehne, Sekante, Tangente, Passante, Zentriwinkel, Peripheriewinkel	A ist Eckpunkt von EFGHJL, M ist Mittelpunkt von k, Strecke AB ist Sehne von k, ...
Dreiecke Vierecke Vierecksarten (Haus der Vierecke) Sehnenviereck	Umkreis, Inkreis Umkreis	ist Umkreis von ABCD, ist Inkreis von ...

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

1 Begriffe im Geometrieunterricht der SI, 1.1 Objekte und Relationen, 1.1.1 Figuren und Körper (Figurenbegriffe),

1.1.1.3 Körper		
Objekte		Relationen
1.3.1 durch Ebenen begrenzt	1.3.2. Begrenzungsflächen haben Krümmung	
Polyeder (Vielflächner) Polyedergrundbegriffe: Ecke, Kante, Seitenfläche, Raumdiagonale, Flächendiagonale,		ABCD ist Grundfläche von Prisma 1, ...
Prismen gerades/schiefes Prisma Grund-, Deckfläche Höhe spezielle Prismen Quader, Würfel, dreiseitiges Prisma Prismennetze	Kreiszylinder gerader/schiefer Kreiszylinder Grund-, Deckfläche Höhe Mantel Abwicklung	
Pyramiden gerade/schiefe Pyramide quadratische P. Pyramidennetz	Kreiskegel gerader/schiefer Kreiskegel Grundfläche, Höhe, Spitze Abwicklung	
	Kugel Radius, Durchmesser, Mittelpunkt Halbkugel	

1.1.2 Transformationen (Abbildungsbegriffe)

1.1.2.1 Ähnlichkeitsabbildungen	
Zentrische Streckung Streckzentrum, Streckfaktor	F_1 ist ähnlich zu F_2
1.1.2.2 Bewegungen	
Geradenspiegelung, Spiegelachse, Symmetrieachse Drehung, Drehzentrum, Drehwinkel, Drehsinn Verschiebung Verschiebungspfeil	F_1 ist kongruent zu F_2 F_1 ist achsensymmetrisch zu F_2 , F_1 ist achsensymmetrisch F_1 ist drehsymmetrisch zu F_2 , F_1 ist drehsymmetrisch
Nacheinanderausführung von Kongruenzabbildungen	

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

1 Begriffe im Geometrieunterricht der SI, 1.1 Objekte und Relationen, 1.1.3 Abbildungen von der Menge der Figuren und Körper auf \mathbb{R} (Maßbegriffe),

1.1.3 Abbildungen von der Menge der Figuren und Körper auf \mathbb{R} (Maßbegriffe)

1.1.3.1 Längen	
Einheitstrecke, Einheiten der Längenmessung (m, cm, dm, km, ...) Streckenlänge Länge einer Strecke Länge eines Streckenzuges Umfang Eines Polygons Dreiecksumfang Vierecksumfang	Zwei Strecken sind gleichlang (sind kongruent)

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

1 Begriffe im Geometrieunterricht der SI, 1.1 Objekte und Relationen, 1.1.3 Abbildungen von der Menge der Figuren und Körper auf (Maßbegriffe),

1.1.3.2 Flächeninhalt

Einheitsquadrat

Einheiten der Flächenmessung (m^2 , cm^2 , ..., a, ha)

Flächeninhalt

von Vielecken

von Dreiecken

von Vierecken

Oberflächeninhalt

von Körpern

Quader, Pyramide, ..., Zylinder, Kugel

F_1 ist flächeninhaltsgleich zu F_2

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

1 Begriffe im Geometrieunterricht der SI, 1.1 Objekte und Relationen, 1.1.3 Abbildungen von der Menge der Figuren und Körper auf (Maßbegriffe),

1.1.3.3 Volumen

Einheitswürfel

Einheiten:

Raummaße (m^3 , dm^3 , ...)

Hohlmaße (l, ml, ...)

Volumen

Quader, Pyramide, Zylinder, Kugel

K_1 ist flächeninhaltsgleich zu K_2

1.2 Objekte und ihre Eigenschaften

1.2.1 Figurenbegriffe

Eine Eigenschaft eines Objekts ist eine Aussage die durch alle Repräsentanten des Objektes (Objekttyps) erfüllt werden.

Beispiele:

- Jedes Quadrat hat die Eigenschaft, ein Rechteck zu sein.
- Jedes Quadrat hat die Eigenschaft vier gleichlange Seiten zu besitzen.

- Jede Ähnlichkeitsabbildung hat die Eigenschaft, eine Gerade auf eine Gerade abzubilden.
- Jede Ähnlichkeitsabbildung hat die Eigenschaft, eine Gerade g auf eine zu g parallele Gerade abzubilden.

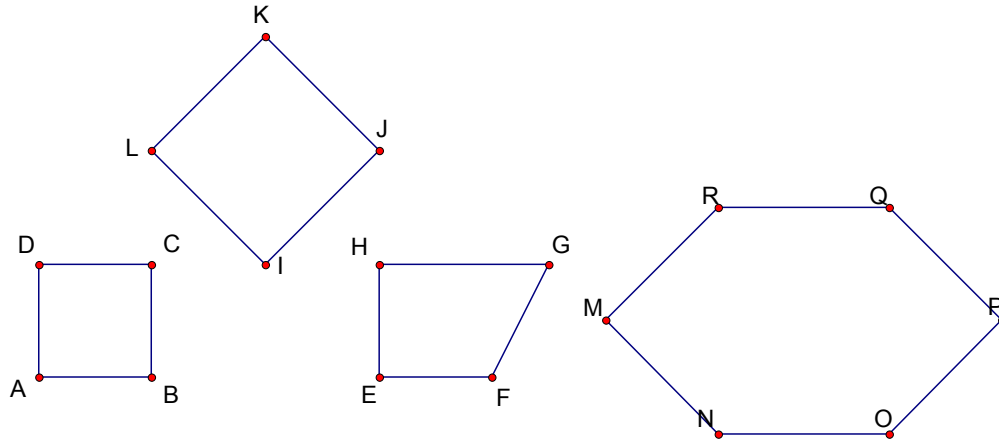
- Jedes gleichschenklige Dreieck hat die Eigenschaft, über zwei gleichlange Seiten zu verfügen.
- Jedes gleichschenklige Dreieck hat die Eigenschaft, über zwei gleichgroße (Basis)Winkel zu verfügen.

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

1 Begriffe im Geometrieunterricht der SI, 1.2 Objekte und ihre Eigenschaften, 1.2.1 Figurenbegriffe,

Objektbegriffe (Objekttypen) sind damit Klassen von Objekten, deren Repräsentanten gewisse Eigenschaften erfüllen.
Zugehörige Äquivalenzrelation: Objekt O ist Repräsentant des Objektbegriffs bzw. ist nicht Repräsentant des Objektbegriffs.

Beispiel:



ABCD und IJKL sind Repräsentanten des Begriffs Quadrat. (einfacher: sind Quadrate)

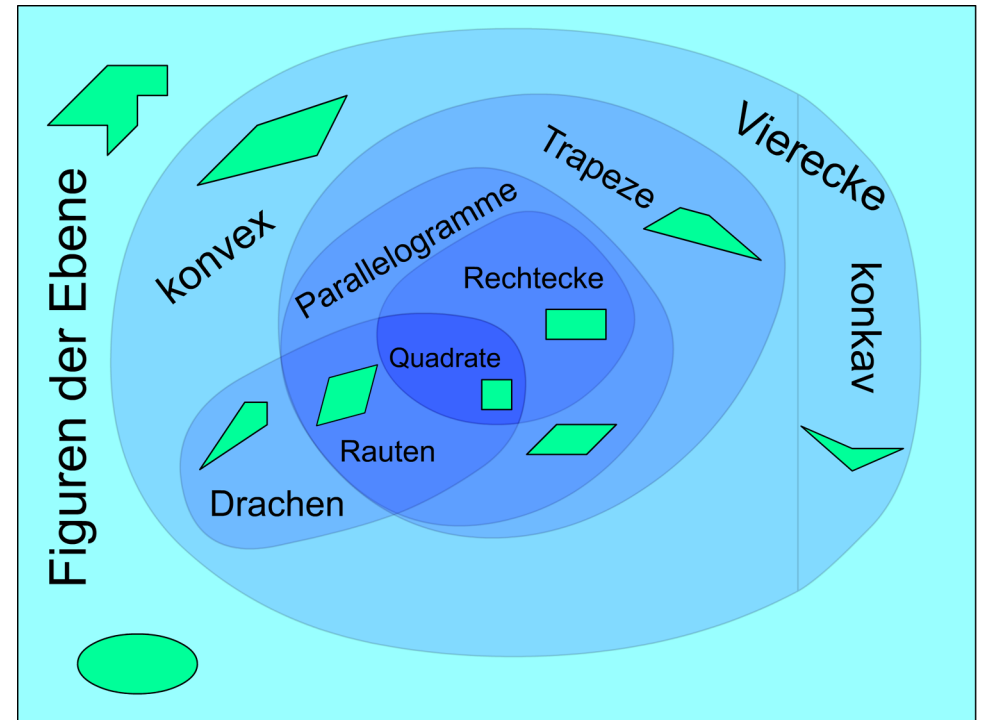
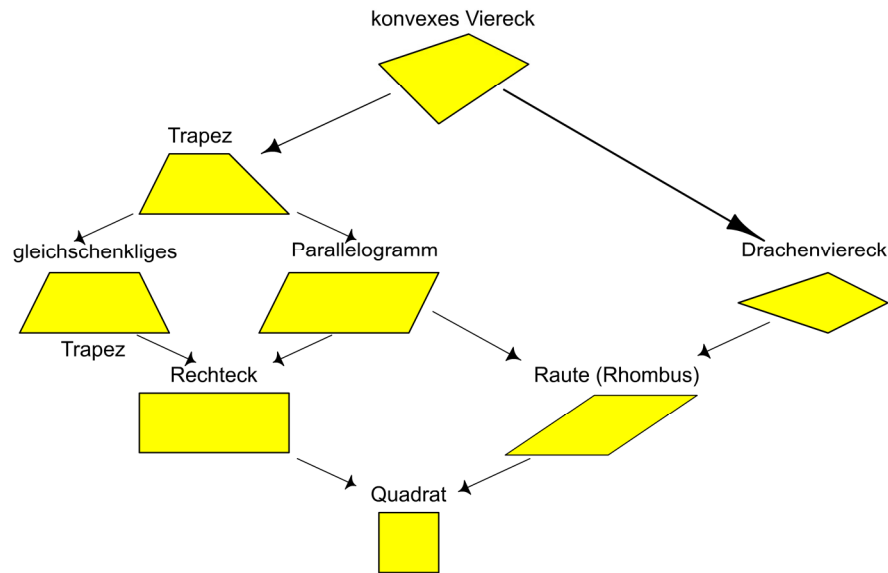
EFGH und MNOPQR sind keine Repräsentanten des Objekttyps (Begriffs) Quadrat. (einfacher: sind keine Quadrate)

ABCD und IJKL bilden jedoch kein Repräsentantenpaar der Begriffs „zueinander kongruente Quadrate“. (einfacher: sind nicht kongruent zueinander)

1.2.2 Begriffsbildung:

Alle Elemente einer Grundmenge werden entsprechend ihrer gemeinsamen Eigenschaften zu einem Objektbegriff (Objekttyp) zusammengefaßt.

Das Haus der Vierecke



1.2.3 Begriffshierarchien:

Oberbegriff: Polygon, Unterbegriff: Viereck, Unterunterbegriff: konvexes Viereck, ...

1.2.4 Vererbung - ein didaktischer Vergleich mit der objektorientierten Programmierung (OOP)

1.2.4.1 Objekte

- Jedes Objekt ist durch bestimmte Eigenschaften gekennzeichnet, diese können mittels gewisser Methoden spezifiziert werden.

1.2.4.2 Objektklasse:

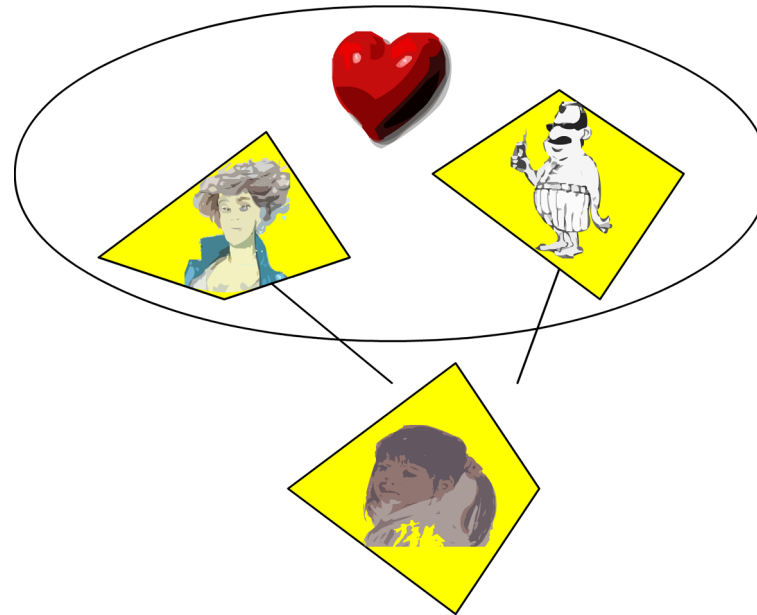
- Jede Klasse beschreibt genau die Eigenschaften all derjenigen Objekte, die eben dieser Beschreibung gemäß aus ihr hervorgehen würden.

1.2.4.3 Generierung neuer Klassen aus bereits bestehenden Klassen:

- Eine Klasse Viereck sei bereits generiert, sie hat die Eigenschaft über vier Eckpunkte zu verfügen, die in der Reihenfolge ihrer Nennung zu verbinden sind.
- Aus der Elternklasse Viereck wird jetzt eine neue Klasse gewonnen: Drachenviereck.
- Als Kind der Klasse Viereck erbt Drachenviereck die Eigenschaft über vier Eckpunkte zu verfügen von seinen Eltern.
- Jedes Kind ist jedoch etwas besonderes: Drachenviereck ist ein besonders schönes Kind, es ist achsensymmetrisch, wobei die Symmetrieachse eine der Diagonalen ist.
- Drachenviereck wird erwachsen und erzeugt weitere noch schönere Kinder: Rhomben.
- Zusammen mit Parallelogramm wird dann Raute gezeugt.

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

1 Begriffe im Geometrieunterricht der SI, 1.2 Objekte und ihre Eigenschaften, 1.2.4 Vererbung - ein didaktischer Vergleich mit der objektorientierten Programmierung (OOP),



Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

1 Begriffe im Geometrieunterricht der SI, 1.3 Relationsbegriffe, 1.2.4 Vererbung - ein didaktischer Vergleich mit der objektorientierten Programmierung (OOP),

1.3 Relationsbegriffe

Die Unterscheidung zwischen Eigenschaftsbegriffen und Relationsbegriffen ist didaktischer Natur.

(Letztlich ist z.B. die Eigenschaft ein Quadrat zu sein, eine besondere Form der Teilmengenrelation: Das spezielle Quadrat ABCD gehört zur Menge der Quadrate.)

Relation:

Nichtleere Teilmenge aus dem Kreuzprodukt zweier nichtleerer Mengen A und B.

Relation	Menge A (Vorbereich)	Menge B (Nachbereich)
Ist kongruent zu	Menge aller Figuren	Menge aller Figuren
Ist ähnlich zu	Menge aller Figuren	Menge aller Figuren
Ist parallel zu	Menge der Geraden des Raumes	Menge der Geraden des Raumes
Ist parallel zu	Menge der Ebenen des Raumes	Menge der Ebenen des Raumes
Ist parallel zu	Menge der Geraden des Raumes	Menge der Ebenen des Raumes
Ist orthogonal zu	Menge der Geraden des Raumes	Menge der Geraden des Raumes
Ist orthogonal zu	Menge der Ebenen des Raumes	Menge der Ebenen des Raumes
Ist orthogonal zu	Menge der Geraden des Raumes	Menge der Ebenen des Raumes
Ist Tangente an	Geraden	Punktmengen des Raumes
Hat Tangente	Punktmengen des Raumes	Menge der Geraden
Ist Mittelsenkrechte von	Strecken	Geraden
Hat Mittelsenkrechte	Geraden	Strecken
Ist Umkreis von	Kreise	Figuren
Hat Umkreis	Figuren	Kreise

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

1 Begriffe im Geometrieunterricht der SI, 1.4 Funktionsbegriffe, 1.2.4 Vererbung - ein didaktischer Vergleich mit der objektorientierten Programmierung (OOP),

1.4 Funktionsbegriffe

Unterscheidung ist auch hier didaktischer Natur.

Diese Unterscheidung ist insbesondere durch die Tätigkeiten des Messens gegeben: Maßbegriffe.

Länge:

Es existieren unendlich viele Abbildungen, die die Punkte einer Geraden eineindeutig auf die Menge der reellen Zahlen abbilden.

Eine von diesen Funktionen wird ausgewählt. Jeder Strecke läßt sich jetzt eine reelle Zahl, ihre Länge zuordnen.

Winkel:

Es existiert eine Klasse von Winkel, die bezüglich der Winkelmessung ausgezeichnet werden kann: die rechten Winkel (ein rechter Winkel ist ein Winkel, der zu einem seiner Nebenwinkel kongruent ist).

Allen rechten Winkel wird die reelle Zahl 90 zugeordnet. Jetzt kann man eine Abbildung von der Menge der Winkel auf das Intervall $[0, 360]$ definieren.

Flächeninhaltsfunktion

Volumenmaßfunktion

Problematik wird im Rahmen des Kapitels Inhaltslehre noch einmal aufgegriffen.

2 Definieren oder „Definieren“?

2.1 Informelle und formale Definitionen

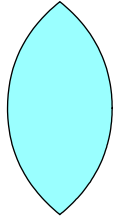
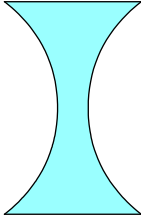
Der Begriff Definition ist aus dem MU der SI weitestgehend verbannt worden (Erleichterungspädagogik). Trotzdem ist es natürlich notwendig, die Dinge beim Namen zu nennen und festzulegen, was man unter einem bestimmten Begriff im weiteren verstehen will.

Je nach Begriff und Klassensituation wird man mit unterschiedlichen Exaktheits- bzw. Abstraktionsgraden arbeiten:

2.1.1 Beispiel: Begriff der konvexen Figur

2.1.1.1 Orientierung an der Umwelt

Brillenträger wissen:

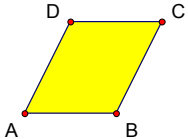
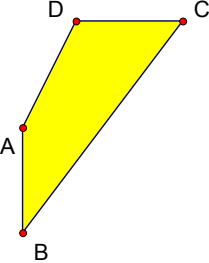
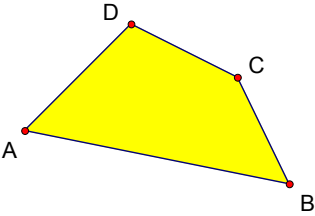
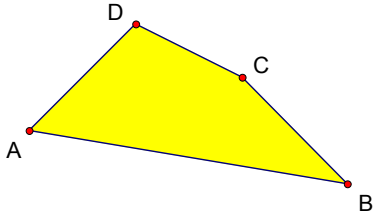
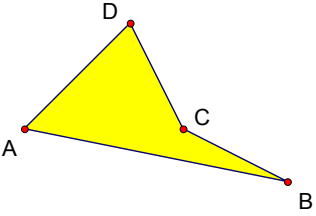
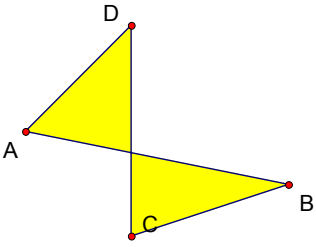
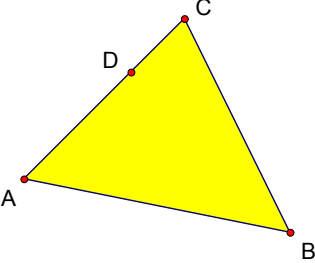
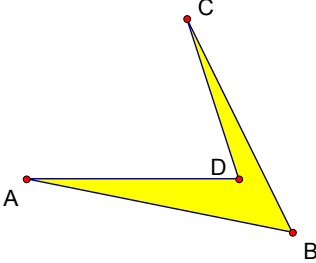
Sammellinse sind konvex	Zerstreuungslinsen sind konkav (nicht konvex)
 <p data-bbox="510 1034 725 1066">für Weitsichtige</p>	 <p data-bbox="1473 1034 1688 1066">für Kurzsichtige</p>

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

2 Definieren oder „Definieren“?, 2.1 Informelle und formale Definitionen, 2.1.1 Beispiel: Begriff der konvexen Figur,

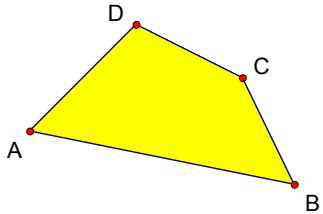
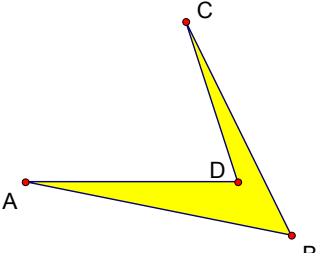
2.1.1.2 Intuitives Begriffsverständnis

eingeschränkt auf Vierecke, Verdeutlichung des Begriffs durch Beispiele und Gegenbeispiele

			
Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4
			
Figur 5	Figur 6	Figur 7	Figur 8

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

2 Definieren oder „Definieren“?, 2.1 Informelle und formale Definitionen, 2.1.1 Beispiel: Begriff der konvexen Figur,

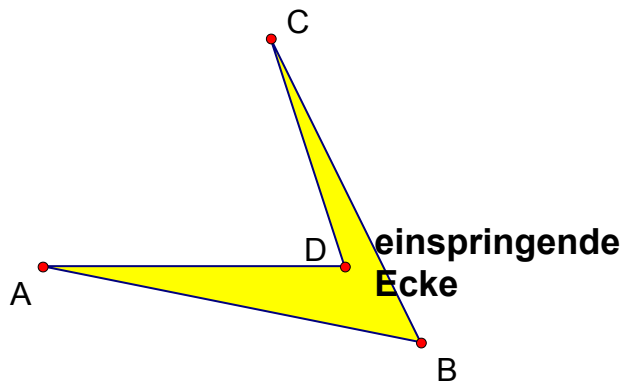
konvex	nicht konvex
 <p data-bbox="591 507 689 539">Figur 3</p>	 <p data-bbox="1561 539 1659 571">Figur 4</p>
Begriffsdefinition	Fachlich-didaktischer Kommentar
Vierecke, die nicht so aussehen, wie die in der rechten Spalte sind konvexe Vierecke.	Keine wirkliche Definition es werden Repräsentanten und Nichtrepräsentanten des Begriffs intuitiv voneinander unterschieden.

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

2 Definieren oder „Definieren“?, 2.1 Informelle und formale Definitionen, 2.1.1 Beispiel: Begriff der konvexen Figur,

2.1.1.3 informelle Definition

Einfache sprachliche Fassung des Begriffs, der Anschauung entnommen.



Begriffsdefinition

Ein Viereck ist konvex, wenn es keine einspringende Ecke hat.

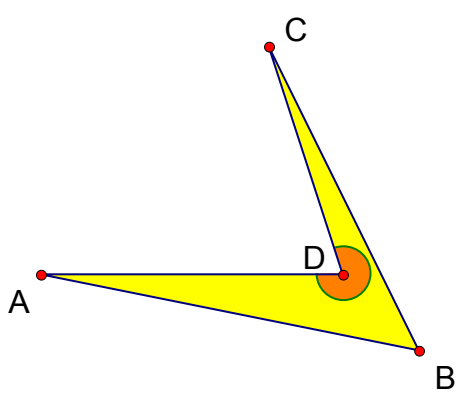
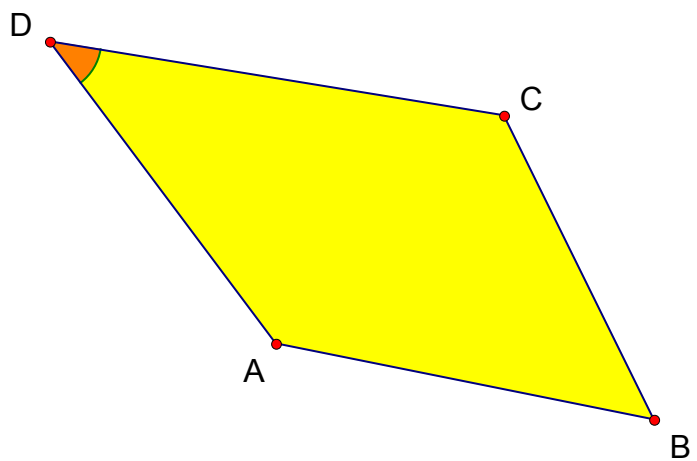
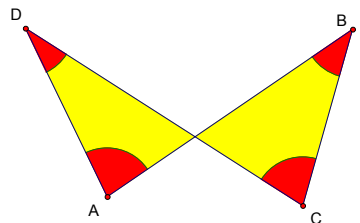
Fachlich-didaktischer Kommentar

Informelle, intuitive „Definition“: hält einer sauberen mathematischen Betrachtungsweise nicht stand. (Was ist eine einspringende Ecke?)

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

2 Definieren oder „Definieren“?, 2.1 Informelle und formale Definitionen, 2.1.1 Beispiel: Begriff der konvexen Figur,

2.1.1.4 formale Definition, eingeschränkt in der Exaktheit

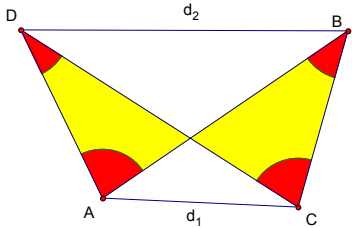
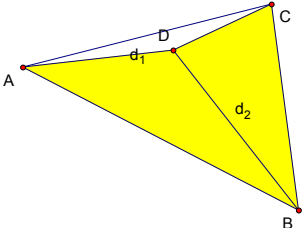
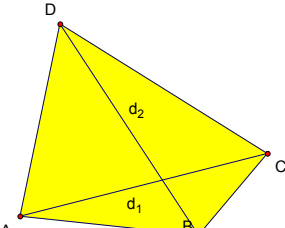
	
<p>Begriffsdefinition</p>	<p>Fachlich-didaktischer Kommentar</p>
<p>Ein Viereck, das keinen überstumpfen Innenwinkel hat, ist ein konvexes Viereck.</p>	<p>formale Definition, mathematisch fast sauber, Problem: überschlagenes Viereck</p>  <p>Aus didaktischer Sicht in der SI vernachlässigbar!</p>

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

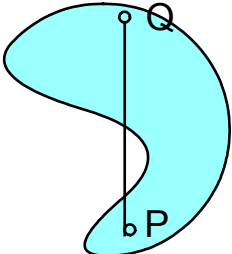
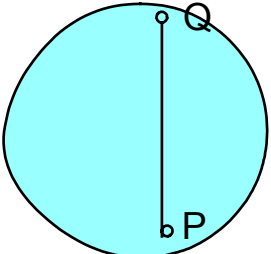
2 Definieren oder „Definieren“?, 2.1 Informelle und formale Definitionen, 2.1.1 Beispiel: Begriff der konvexen Figur,

2.1.1.5 Extremfälle helfen

bei der Findung eines erweiterten Verständnisses des Begriffs „konvexe Figur“; neue formale Definition „konvexes Viereck“

		
nicht konvex	nicht konvex	konvex
Begriffsdefinition		Fachlich-didaktischer Kommentar
Ein Viereck, dessen beide Diagonalen vollständig in seinem Inneren liegen, ist ein konvexes Viereck.		Formale, korrekte Definition, neue intuitive Idee des Begriffs kommt zum Tragen.

2.1.1.6 Erweiterung auf noch allgemeineren Fall

	
Begriffsdefinition	Fachlich-didaktischer Kommentar
<p>Allgemein kann der Begriff konvex für beliebige Punktmenge definiert werden</p> <p>Definition: (konvex)</p> <p>Es sei F eine geometrische Figur bzw. ein geometrischer Körper.</p> <p>I sei das Innere von F.</p> <p>F heißt konvex $:\Leftrightarrow \forall P, Q \in I : \forall R \in \overline{PQ} \Rightarrow R \in I$</p>	Formale, korrekte Definition, gültig für beliebige Figuren bzw. Körper

2.1.2 Beispiel: Quadrat

intuitiv	Die Seitenflächen eines Würfels sind z.B. Quadrate
informell	Ein Viereck mit 4 gleichlangen Seiten und vier rechten Innenwinkeln ist ein Quadrat.
formal	Ein Rechteck, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, heißt Quadrat.

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

2 Definieren oder „Definieren“?, 2.2 Real-, Konventional- und genetische Definition, 2.2.1 „Eine Definition ist wie ein Opernführer“

2.2 Real-, Konventional- und genetische Definition

2.2.1 „Eine Definition ist wie ein Opernführer“

2.2.1.1 Beispiel: Der Barbier von Sevilla

Es spielen mit	Eigenschaft	Weitere Eigenschaft	Inhalt:
Almaviva	der Graf	Tenor	<i>Ort: Sevilla. Zeit: Ende 18. Jh. Graf Almaviva nähert sich seiner Angebetenen Rosina inkognito, einmal als betrunkenen Soldat und ein anderes Mal als Musiklehrer. Die Maskerade hat zwei Gründe: zum einen will er ausschließen, daß sich Rosina nur wegen seines Titels in ihn verliebt, zum anderen um den geldgierigen Dr. Bartolo zu täuschen, der selbst überlegt, die reiche Rosina, sein Mündel, zu heiraten. Im ersten Akt (als Soldat verkleidet) gelingt es dem Grafen tatsächlich Rosina einen Liebesbrief zuzustecken, im zweiten Akt (als Musiklehrer getarnt) kommt er ihr beim Gesangsunterricht näher und beide gestehen sich ihre Liebe. ...</i>
Fiorillo	Diener des Grafen Almaviva	Tenor / Bariton / Bass	
Bartolo	der Doktor	Bass	
Ambrogio	Diener von Bartolo	Bass	
Berta	Haushälterin bei Bartolos	Sopran	
Marzelline	Haushälterin bei Bartolo	Alt	
Basilio	der Musikmeister	Bass	
Figaro	der Barbier	Bariton; Buffo	
Rosina		Mezzosopran / Sopran	
Offizier		Bass	
Notar		stumme Rolle	

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

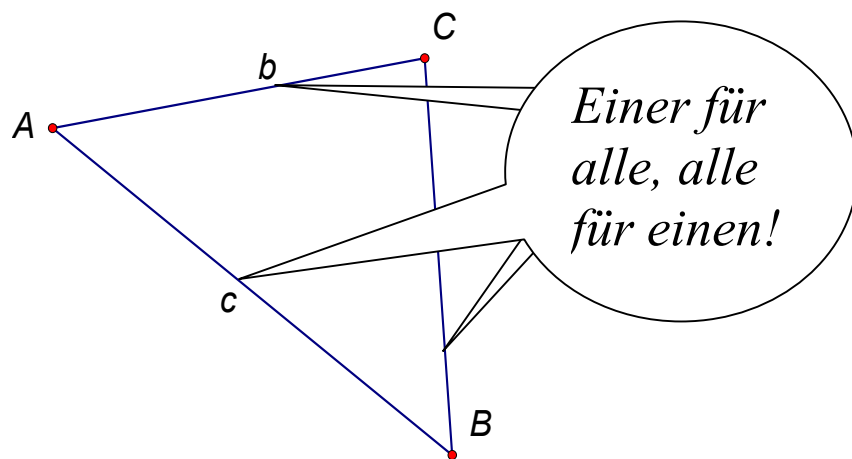
2 Definieren oder „Definieren“?, 2.2 Real-, Konventional- und genetische Definition, 2.2.1 „Eine Definition ist wie ein Opernführer“,

2.2.1.2 Beispiel: Dreieck

Es spielen mit	Eigenschaft	Weitere Eigenschaft
A, B und C	Punkte	Nicht kollinear
\overline{AB}	Verbindungsstrecke, auch c genannt	verbindet A mit B
\overline{BC}	Verbindungsstrecke, auch a genannt	verbindet B mit C
\overline{CA}	Verbindungsstrecke, auch b genannt	verbindet C mit A

Inhalt:

Die drei Strecken \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{CA} bilden das Dreieck $\triangle ABC$.



Wir definieren:

Gegeben seien drei nichtkollineare Punkte A , B und C . Unter dem Dreieck $\triangle ABC$ versteht man die Vereinigungsmenge der drei Strecken \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{CA} .

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

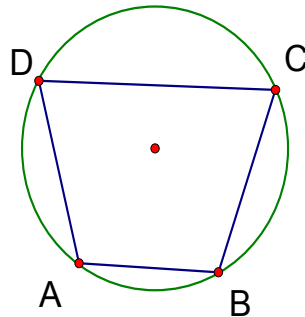
2 Definieren oder „Definieren“?, 2.2 Real-, Konventional- und genetische Definition, 2.2.1 „Eine Definition ist wie ein Opernführer“,

2.2.1.3 Beispiel: Sehnenviereck

Es spielen mit	Eigenschaft	Weitere Eigenschaft
A, B, C und D	Eckpunkte eines Vierecks	liegen auf ein und demselben Kreis

Inhalt:

$ABCD$ ist ein Sehnenviereck



Definition 1:

Es seien A, B, C, D vier Punkte, die auf ein und demselben Kreis liegen. Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck.

Definition 2:

Es $ABCD$ ein Viereck. Wenn $ABCD$ einen Umkreis hat, so ist es ein Sehnenviereck.

Definition 3:

Formulieren Sie zwei weitere mögliche Definitionen des Begriffs Sehnenviereck!

2.2.2 „Handlungsanleitung“ für das Definieren

2.2.2.1 Schrittfolge

- Zähle alle „Mitwirkenden“ auf!
- Zähle die Eigenschaften der „Mitwirkenden“ auf!
- Bezeichne den „neuen Zusammenhang“ der „Mitwirkenden“

2.2.2.2 Beispiel: Kreisdurchmesser

„Mitwirkende“:

Ein Kreis, eine Gerade, eine Strecke auf dieser Geraden

„Eigenschaften“:

Gerade geht durch den Mittelpunkt des Kreises,

Gerade hat somit zwei Schnittpunkte mit dem Kreis.

„noch ein Mitwirkender“:

Strecke durch obige Schnittpunkte bestimmt

„neuer Zusammenhang“:

obige Strecke ist ein Durchmesser des Kreises

Definition:

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M . Ferner sei g eine Gerade, die durch M geht und somit k in den beiden Punkten A und B schneidet.

Die Strecke \overline{AB} ist ein Durchmesser des Kreises k .

Aufgaben:

- Der Begriff Durchmesser hat zwei verschiedene Bedeutungen. Definieren Sie die zweite Bedeutung, die in obiger Definition nicht zum Tragen kommt!
- Definieren Sie den Begriff „Kreisradius“ in der Weise, dass in Bezug auf den zu definierenden Begriff ein unbestimmter Artikel verwendet werden muß!

2.2.3 Realdefinitionen

2.2.3.1 Beispiel: Trapez

Definition:

Ein Viereck, mit zwei zueinander parallelen Seiten ist ein Trapez.

2.2.4 Konventionaldefinitionen

2.2.4.1 Beispiel: Trapez

Definition:

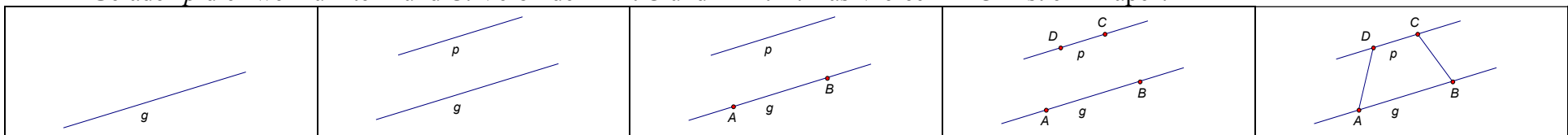
Wenn ein Viereck zwei zueinander parallele Seiten hat, so heißt das Viereck Trapez.

2.2.5 Genetische (operationale) Definition

2.2.5.1 Beispiel: Trapez

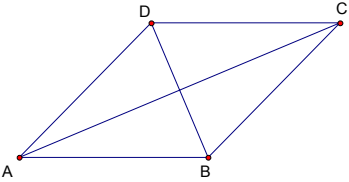
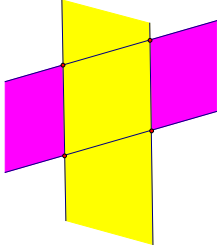

Definition: (besser: Handlungsanleitung)

Zeichne eine Gerade g und eine zu g parallele Gerade p . Wähle auf g zwei Punkte A und B . Wähle mit demselben Richtungssinn auf der Geraden p die zwei Punkte D und C . Verbinde A mit C und B mit D . Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez.



2.3 Zusammenfassung: Definitionen

2.3.1 Beispiel: Raute

		Exaktheit, formale Korrektheit, Logik in der Hierarchie		
		intuitiv	informell	formal
Art der Formulierung	operational	<p>Zeichne die beiden Begrenzungsgeraden eines Streifens nach. Drehe den Streifen so, dass die gezeichneten Geraden geschnitten werden. Zeichne noch einmal die Begrenzungsgeraden des Streifens nach. Als Schnittfigur erhältst du eine Raute.</p> 		
	konventional	<p>Wenn ein Viereck eine Form hat wie die Vierecke in der Bayrischen Fahne, so handelt es sich um eine Raute.</p> 		
	real	<p>Vierecke der obigen Form heißen Rauten.</p>		

Ergänzung : Übungsaufgabe

Merke: Die Entscheidung welcher Art von Erklärung/Definition man im Unterricht verwendet, ist eine pädagogisch/didaktisch/methodische Entscheidung, die von verschiedenen Parametern abhängt.

2.4 Begriffseigenschaften und ihre Verwendung in Definitionen

2.4.1 Beispiel Raute

2.4.1.1 Variante 1

Definition: Raute

Eine Raute ist ein Viereck, dessen Seiten gleichlang sind.

Satz: (Kriterium)

Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn seine Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und einander halbieren.

Beweis:

(\rightarrow)

Sei $ABCD$ eine Raute.

Zu zeigen: Die Diagonalen von $ABCD$ stehen senkrecht aufeinander und halbieren einander.

(\leftarrow)

Sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und einander halbieren.

Zu zeigen: $ABCD$ ist eine Raute.

2.4.1.2 Variante 2

Definition: Raute

Eine Raute ist ein Viereck, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und einander halbieren.

Satz: (Kriterium)

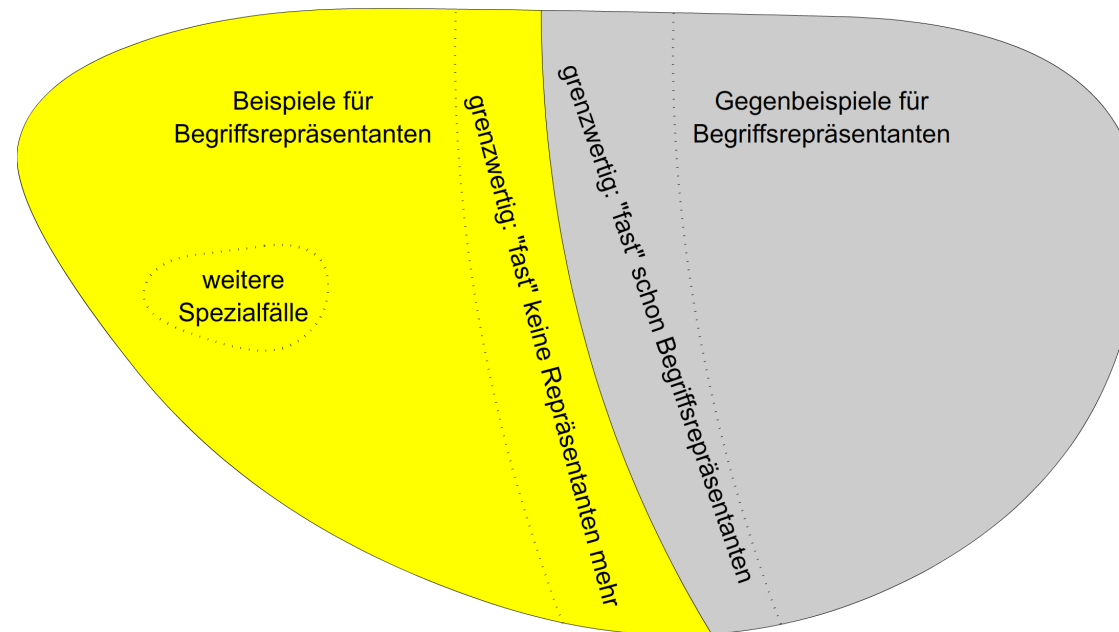
Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn alle seine Seiten gleichlang sind.

3 Begriffserarbeitung

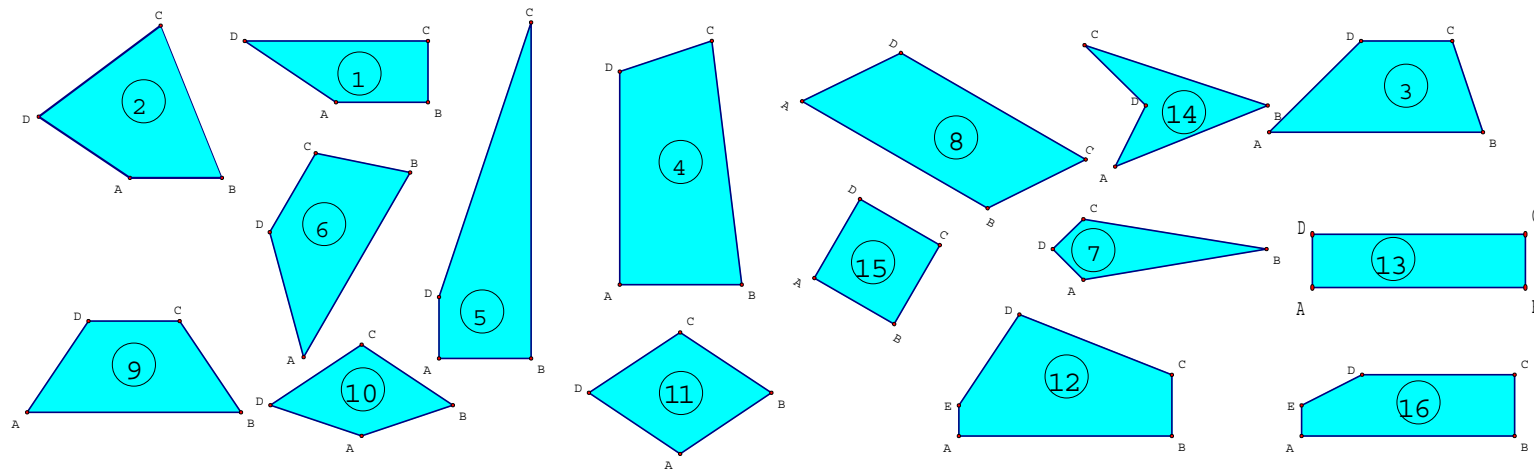
3.1 Erarbeiten von Begriffen auf induktivem Weg

3.1.1 Grundprinzip

Ein vielseitig zusammengestelltes Ausgangsmaterial wird analysiert und klassifiziert.



3.1.2 Ein Beispiel



3.1.3 Varianten nach Sortierung des Ausgangsmaterials

3.1.3.1 Variante a

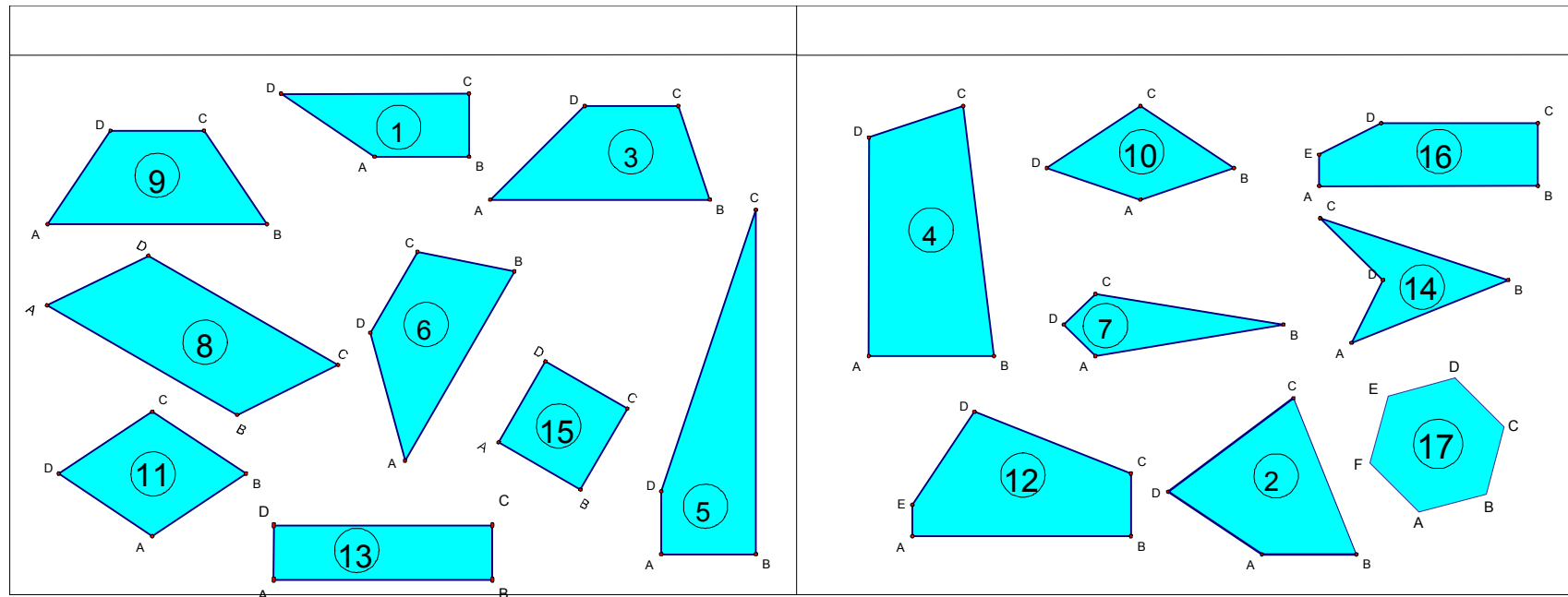
Material liegt ungeordnet vor

a_1	a_2
Den Schülern ist das Begriffswort bisher mehr oder weniger völlig unbekannt	Schüler kennen das das Begriffswort bzw. haben diesbezügliche Vorerfahrungen
abhängig von der Klassenstufe	
<ul style="list-style-type: none"> • relativ selten, häufig existieren hinsichtlich der im GU zu vermittelnden Begriffe Vorerfahrungen verschiedenster Art • Beispiele: Prisma, F_1 kongruent zu F_2, F_1 ähnlich zu F_2, 	<ul style="list-style-type: none"> • Häufig kennen die Schüler aus dem vorangegangenen Mathematikunterricht oder ihrer sonstigen Lebenserfahrung das Begriffswort und haben Vorstellungen vom Begriffsinhalt.
<ul style="list-style-type: none"> • Analysieren der Einzelobjekte • Vergleichen der Einzelobjekte Feststellen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden • Hervorheben des Definitionsmerkmals (oder mehrerer) • Bilden von zwei Klassen nach dem(n) hervorgehobenen Merkmal(en) (Repräsentanten – übrig Objekte) 	<ul style="list-style-type: none"> • Aufteilen des Materials in zwei Klassen auf Grund der Vorkenntnisse • Beschreiben und Begründen der Einteilung für die einzelnen Objekte • Motivieren einer präziseren Begriffsfestlegung durch Zweifelsfälle bzw. mißglückte allgemeine Beschreibungen.

3.1.3.2 Variante b

Material ist bereits in zwei Teilmengen aufgeteilt

- Analysieren der Einzelobjekte
- Vergleichen der Einzelobjekte innerhalb der beiden Mengen und von Menge zu Menge
- Vergleichen der beiden Mengen mit dem Ziel, das/die Merkmal/e zuerkennen, das/die der Bildung der beiden Klassen zugrunde lag/en.



3.1.4 Erstellung des Ausgangsmaterials auf konstruktivem Weg (Konstruktiver Begriffserwerb)

3.1.4.1 Das Grundprinzip

Schüler generieren das Ausgangsmaterial selbst

- Legen,
- Bauen,
- Drucken,
- Falten,
- Schneiden, ...
- ...

Weitere Bezeichnungen:

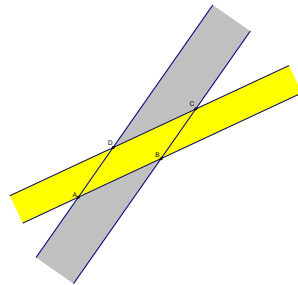
- „operative Begriffsbildung“ (*Winter 1981, Zech 1996*)
- „Lehren von Begriffen durch Handeln“ (*Vollrath 1984*)

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

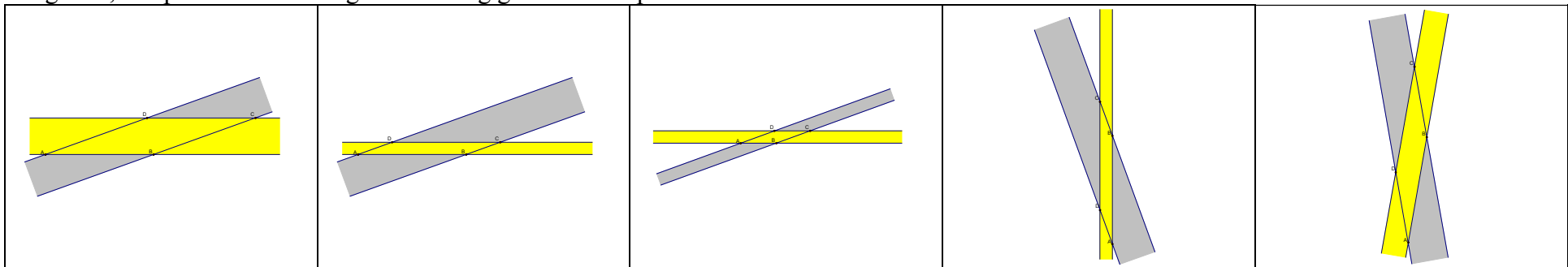
3 Begriffserarbeitung, 3.1 Erarbeiten von Begriffen auf induktivem Weg, 3.1.4 Erstellung des Ausgangsmaterials auf konstruktivem Weg (Konstruktiver Begriffserwerb),

3.1.4.2 Beispiel 1: Parallelogramm

- Vorbereitung:
Schneide Dir aus Pappe Streifen¹ der folgenden Breite: 3 cm, 4 cm, 10 cm, ...
- Aufgabenstellung:
Zeichne mit den Streifen verschiedene Vierecke wie in der folgenden Abbildung.



mögliche, entsprechend der Aufgabenstellung generierte Repräsentanten:



- Problematik dieser Aufgabenstellung: es werden keine Gegenbeispiele generiert

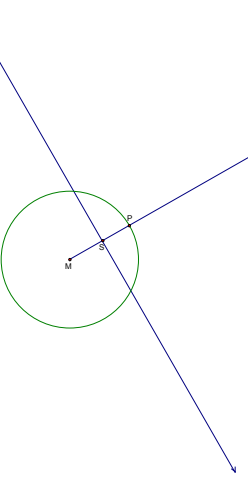
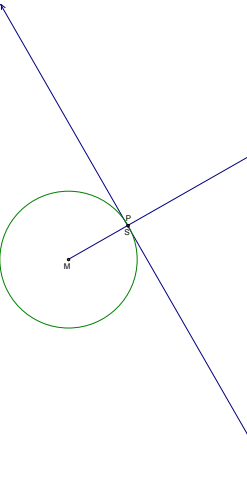
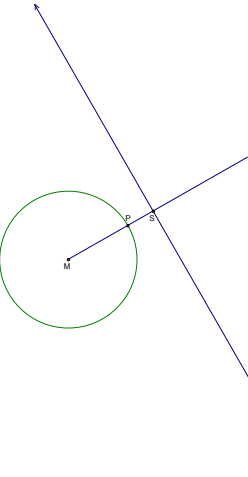
¹ Der Begriff „Streifen“ als Paar paralleler Geraden, sei bereits bekannt.

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

3 Begriffserarbeitung, 3.1 Erarbeiten von Begriffen auf induktivem Weg, 3.1.4 Erstellung des Ausgangsmaterials auf konstruktivem Weg (Konstruktiver Begriffserwerb),

3.1.4.3 Beispiel 2: Kreis und Gerade: Passante, Tangente, Sekante

- Aufgabenstellung:
 - zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M ,
 - lege auf k einen Punkt P fest,
 - zeichne den Strahl MP^+ ein.
 - lege auf MP^+ 10 unterschiedliche Punkte fest,
 - zeichne die Senkrechten in diesen Punkten zu dem Strahl MP^+ ,
 - ordne diese Senkrechten nach der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit k !
- Auswertung:

Sekante („Schneidende“)	Tangente („Berührende“)	Passante („vorbei Gehende“)
 A green circle with center M is shown. A blue line passes through the circle, intersecting it at two points. A point P is marked on the circle, and a blue ray MP^+ extends from M through P . A blue line perpendicular to MP^+ is drawn, intersecting the circle at two points.	 A green circle with center M is shown. A blue line is tangent to the circle at point P . A blue ray MP^+ extends from M through P . A blue line perpendicular to MP^+ is drawn, touching the circle at exactly one point, P .	 A green circle with center M is shown. A blue line passes through the circle, intersecting it at two points. A point P is marked on the circle, and a blue ray MP^+ extends from M through P . A blue line perpendicular to MP^+ is drawn, intersecting the circle at two points.

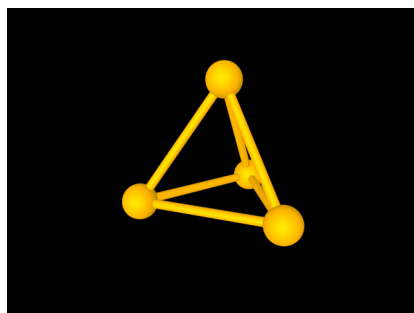
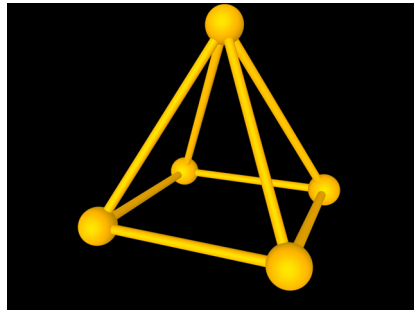
- „Problematik“ dieser Aufgabenstellung: eingeschränkte Sicht durch Vorgabe des Berührungsradius
- Variationen der Aufgabebnstellung sind sicher kein Problem.

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

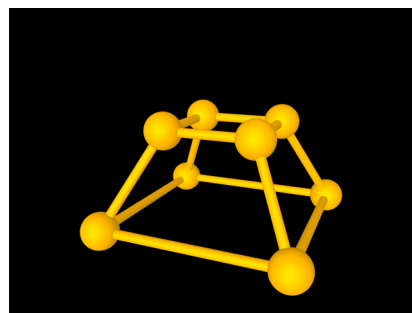
3 Begriffserarbeitung, 3.1 Erarbeiten von Begriffen auf induktivem Weg, 3.1.4 Erstellung des Ausgangsmaterials auf konstruktivem Weg (Konstruktiver Begriffserwerb),

3.1.4.4 Beispiel 3: Pyramide

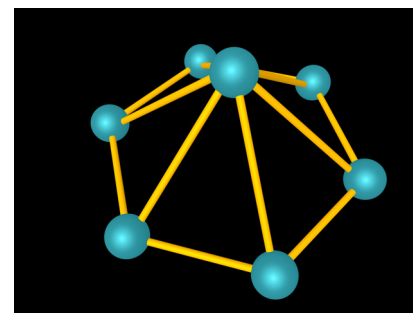
- Arbeitsmaterial: Knete und Schaschlikstäbchen
- Aufgabenstellung: Baue verschiedene Pyramiden!



?



?



?



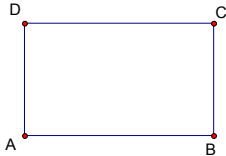
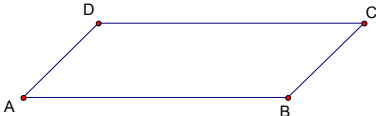
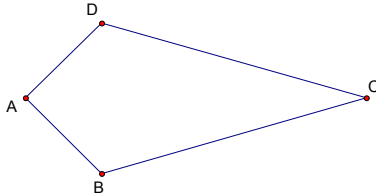
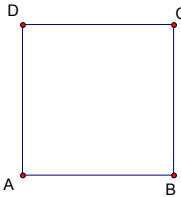
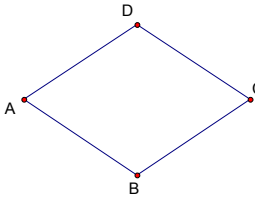
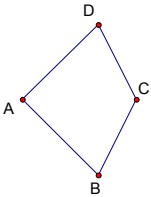
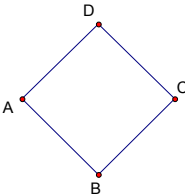
?

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

3 Begriffserarbeitung, 3.1 Erarbeiten von Begriffen auf induktivem Weg, 3.1.4 Erstellung des Ausgangsmaterials auf konstruktivem Weg (Konstruktiver Begriffserwerb),

3.1.4.5 Beispiel 4: Drachen, Rechteck, Parallelogramm (Grundschule)

- Arbeitsmaterial: Stäbchen verschiedener Länge, gleiche Längen treten dabei auf
- Aufgabenstellung:
Lege mit 4 Stäbchen, von denen jeweils zwei gleichlang sind, ein Viereck!
- Lösungen

Rechteck	Parallelogramm	Drachen
		
		
		

3.1.5 Varianten nach Art des Abstraktionsprozesses

3.1.5.1 Begriffserwerb durch Spezifikation aus einem Oberbegriff

Prinzip:

Der Oberbegriff ist bekannt, spezifische für den Oberbegriff nicht zwingend erforderliche Merkmale führen zu dem neuen Begriff.

- Quadrat als spezielles Rechteck
- Quadrat als spezielle Raute
- Konvexes Vieleck:
 - Oberbegriff: Vieleck
 - Spezifisches Merkmal:
“keine einspringenden Ecken“,
oder: keine überstumpfen Innenwinkel
oder: alle Diagonalen liegen im Inneren.
- Punktsymmetrisches Viereck:
 - Oberbegriff: Viereck
 - Spezifisches Merkmal:
? Ü.A.

3.1.5.2 Begriffserwerb durch intensionale Abstraktion

Prinzip

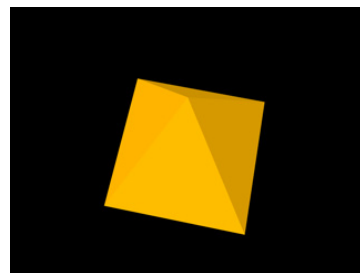
Der Oberbegriff ist nicht bekannt, eine Analyse der spezifischen Eigenschaften von Repräsentanten und Gegenrepräsentanten zu dem neuen Begriff.

Beispiel: Pyramide

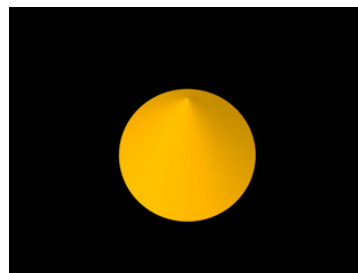
Oberbegriff: Polyeder, in Haupt- und Realschule nicht bekannt bzw. nicht explizit behandelt.

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

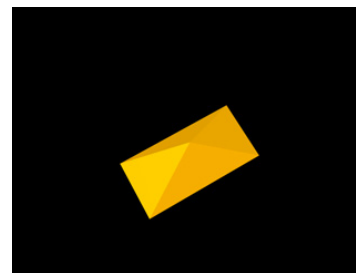
3 Begriffserarbeitung, 3.1 Erarbeiten von Begriffen auf induktivem Weg, 3.1.5 Varianten nach Art des Abstraktionsprozesses,



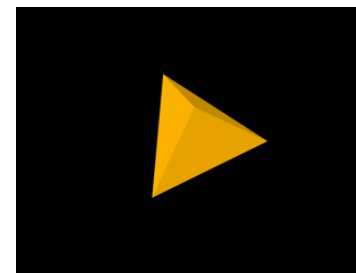
Objekt 1



Objekt 2



Objekt 3



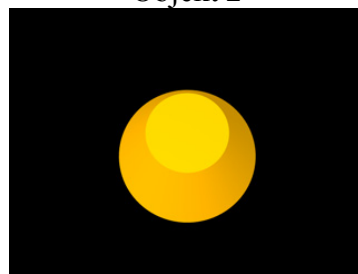
Objekt 4



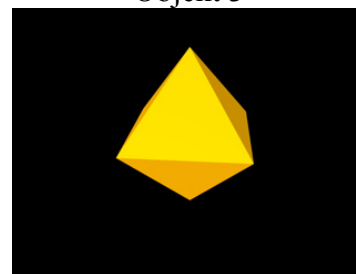
Objekt 5



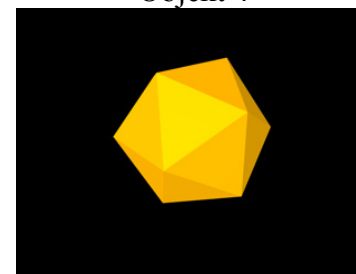
Objekt 6



Objekt 7



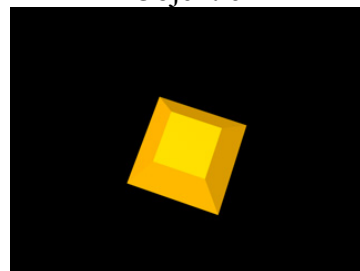
Objekt 8



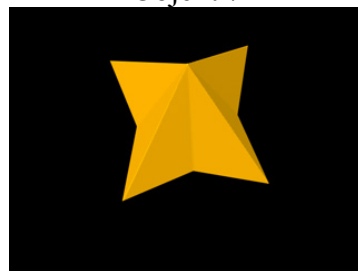
Objekt 9



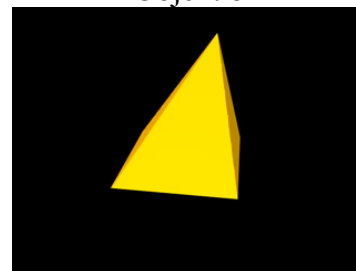
Objekt 10



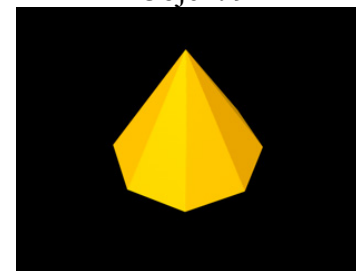
Objekt 11



Objekt 12



Objekt 13



Objekt 14

Objekt 15

Pyramiden	keine Pyramiden

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

3 Begriffserarbeitung, 3.1 Erarbeiten von Begriffen auf induktivem Weg, 3.1.5 Varianten nach Art des Abstraktionsprozesses,

Ergebnis des Abstraktionsprozesses:

Informelle, operationale Definition:

Gegeben sei ein ebenes n -Eck mit den Eckpunkten P_1, P_2, \dots, P_n . Ferner sei S ein Punkt außerhalb der Ebene, in der das n -Eck liegt. Verbindet man alle der Eckpunkte P_1, P_2, \dots, P_n mit dem Punkt S , so erhält man eine Pyramide.

Kapitel 2 Erarbeiten von Begriffen

3 Begriffserarbeitung, 3.1 Erarbeiten von Begriffen auf induktivem Weg, 3.1.5 Varianten nach Art des Abstraktionsprozesses,

3.1.5.3 Begriffserwerb durch Idealisierung und Komplettierung