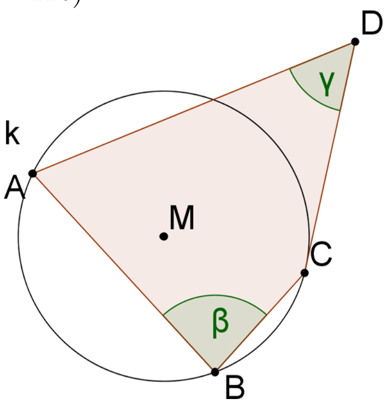
Aufgabe 1: Definieren

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Definieren Sie den Begriff *Mittelpunkt* einer Strecke $\overline{AB}$. Der Punkt M ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, wenn er zu dieser gehört und $\|AM\| = \|MB\|$ gilt	2	
b)	Definieren Sie den Begriff *konvexes Viereck* über die Eigenschaften der Diagonalen derartiger Vierecke. Ein Viereck ist konvex, wenn sich seine Diagonalen schneiden.	2	
c)	Definieren Sie den Begriff *Drachenviereck* unter Verwendung des Begriffs "Mittelsenkrechte". Ein konvexes Viereck, das eine Diagonale hat, die auf der Mittelsenkrechten der anderen Diagonale dieses Vierecks liegt, ist ein Drachenviereck.	2	
d)	Nur unter Verwendung der Eigenschaft E_1 sei der Begriff B korrekt definiert. Es stellt sich heraus, dass B ebenso korrekt über die Eigenschaft E_2 hätte definiert werden können. Was ist E_1 hinsichtlich einer Entscheidung, ob ein Repräsentant R zum Begriff B gehört? Es handelt sich diesbezüglich um ein Kriterium.	2	
e)	Erläutern Sie möglichst genau, was für ein geometrisches Objekt im Folgenden definiert wird: Es sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$, Z sei ein beliebiger Punkt. Ⓢ $:= \{Q \| \|QZ\| \leq a\}$ Es ist eine Kugel um Z mit dem Radius a inklusive ihres Inneren.	2	
f)	Definieren Sie den Begriff *regelmäßiges Dreieck*, ohne sich dabei auf irgendwelche Seitenlängen zu beziehen. Ein Dreieck, in dem alle Innenwinkel die Größe 60° haben, ist ein regelmäßiges Dreieck.	2	
g)	Definieren Sie den Begriff *Schwerpunkt* eines Dreiecks. Unter dem Schwerpunkt eines Dreieck versteht man den Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden.	2	
g)	Mark versucht, den Begriff *Tangentendreieck* zu definieren. Kommentieren Sie Marks Unterfangen. Marks Unterfangen ist ziemlich sinnlos, weil alle Dreiecke einen Inkreis haben und damit Tangentendreiecke sind.	2	

Aufgabe 2: Argumentieren, Begründen

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Ergänzen Sie: Zwei verschiedene Kreise ein und derselben Ebene haben *max. 2* Punkte gemeinsam. Begründen Sie mit einem Stichwort Ihre obige Ergänzung. Begründung: Jedes Dreieck hat genau einen Umkreis.	2	
b)	Inwiefern ist die folgende Formulierung nicht korrekt? Euklidisches Parallelenaxiom: Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade h mit $P \in h$ und $h\|\|g$. Die im *Axiom* geforderte Existenz der Parallelen h ist nicht unabhängig von den Axiomen der absoluten Geometrie.	2	
c)	Ebene Geometrie: Es sei l eine Gerade und F ein Punkt außerhalb von l. Wir definieren die folgende Punktmenge $\mathbb{P} := \{P \mid \|FP\| = \|Pl\|\}$. L sei nun ein beliebiger Punkt auf l. l_L sei die Senkrechte in L auf l. Die Gerade m_{LF} sei die Mittelsenkrechte von $\overline{LF}$. Begründen Sie mit einem Stichwort, warum der Punkt Q mit $\{Q\} = m_{LF} \cap l_L$ ein Punkt von $\mathbb{P}$ ist. Stichwort: *Mittelsenkrechte*	2	
d)	Beweisen Sie: $\text{nkoll}(A, B, C) \Rightarrow A \neq B \neq C \neq A$ Annahme: $A \equiv B$ Nach dem Axiom von der Geraden existiert jetzt genau eine Gerade AB. Wegen $A \equiv B$ gilt $B \in AB$ und damit $\text{koll}(A, B, C)$ was ein Widerspruch zu $\text{nkoll}(A, B, C)$ ist.	3	
e)	Es gelte: $\|AB\| = \cos^2 60° + \sin^2 60°, \|BC\| = \cos^2 45° + \sin^2 45°, \|AC\| = \sqrt{2}$. Beweisen Sie: $\overline{ABC}$ ist ein Dreieck. (Axiome verwenden) (i) $\|AB\| + \|BC\| = 1 + 1 = 2 > \sqrt{2} = \|AC\|$ (ii) $\|AB\| + \|AC\| = 1 + \sqrt{2} > 1 = \|BC\|$ (iii) $\|BC\| + \|AC\| = 1 + \sqrt{2} > 1 = \|AB\|$ Nach dem Axiom von der Dreiecksungleichung gilt $\text{nkoll}(A, B, C)$.	4	
f)	Begründen Sie mit einem einzigen Stichwort: $\overline{ABC}$ aus Teilaufgabe e) hat zwei kongruente Innenwinkel. Basiswinkelsatz	1	

Aufgabe 3: Kriterien

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Formulieren Sie eine Konventionaldefinition des Begriffs *Sehnenviereck*, die möglichst nah an der Semantik der Begriffsbezeichnung ist. Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen ein und desselben Kreises sind, heißt Sehnenviereck.	2	
b)	Unter Satz (I) wollen wir den Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck verstehen. Formulieren Sie diesen in der Wenn-Dann-Form. Wenn ein Viereck ein Sehnenviereck ist, dann sind seine gegenüberliegenden Innenwinkel supplementär.	2	
c)	Satz (II) sei die Umkehrung von Satz (I). Formulieren Sie Satz (II). Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Innenwinkel supplementär sind, dann ist das Viereck ein Sehnenviereck.	2	
d)	Satz (I) sei bewiesen. Der Beweis von Satz (II) steht aus. Führen Sie den Beweis für eine Konstellation entsprechend der Skizze aus Abb. 01. (Voraussetzung, Behauptung, Annahme nicht vergessen, alles in Bezug auf die Skizze)  Abb. 01 V: $\beta + \gamma = 180°$, B: $D \in k$, A: D außerhalb von k (I) $\exists D' : \{D'\} = \overline{AD} \cap k$, (entsprechend der Konstellation der Skizze) (II) $\overline{ABCD'}$ ist Sehnenviereck, (I) (III) $\beta + \angle CD'A = 180°$, (II) (IV) $\angle CD'A \cong \gamma$, V und (III) (V) Widerspruch: $\angle CD'A$ ist Außenwinkel bezüglich γ und damit nach dem schwachen Außenwinkelsatz größer als γ.	8	
e)	Auch Satz (II) lässt sich vollständig beweisen. Formulieren Sie ein Sehnenviereckskriterium. Ein Viereck ist genau dann Sehnenviereck, wenn seine gegenüberliegenden Innenwinkel supplementär sind.	2	

Aufgabe 4: Beweisen wie die Schüler

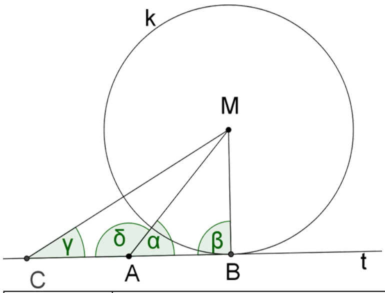


Abb. 02

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Definieren Sie den Begriff *Tangente* an den Kreis k im Berührungspunkt B, ohne den Begriff *senkrecht* dabei zu verwenden. Eine Gerade, die in derselben Ebene wie ein Kreis k liegt, und mit diesem geanu den Punkt B gemeinsam hat, heißt Tangente an k im Berührungspunkt B.	2	
b)	Satz (TS): Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. B sei ein beliebiger Punkt von k Die Tangente t an k mit dem Berührungspunkt B steht senkrecht auf $\overline{MB}$. Formulieren Sie Voraussetzung (V)und Behauptung (B) für diesen Satz. Es genügt, sich diesbezüglich auf die Skizze aus Abb. 02 zu beziehen. (V): t ist Tangente an k in B (B): $\beta = 90°$	2	
c)	Satz (TS) soll indirekt bewiesen werden. Formulieren Sie die Annahme (A). (A): $\overline{MB}$ ist nicht das Lot von M auf t.	1	
c)	Ergänzen Sie den folgenden Beweis des Satzes (TS) (Bezug auf Abb. 02): (i) $\overline{AM}$ ist das Lot von M auf t. Begründung: Existenz des Lotes, (ii) $\alpha = \delta = 90°$, Begründung: (i), (iii) $\exists C : C \in AB^- \wedge \lvert AC\rvert = \lvert AB\rvert$, Begründung: Abstandsaxiom und Axiom vom Lineal, (iv) $\overline{AM} \cong \overline{AM}$, trivial (v) $\overline{CAM} \cong \overline{BAM}$, Begründung: (ii), (iii), (iv), (vi) $\overline{CM} \cong \overline{BM}$, Begründung: (v) (vii) $C \in k$, Begründung: $B \in k$ nach (V), (vi) (viii) Widerspruch: Es gilt auch $C \in t$ und damit könnte t keine Tangente an k sein.	7	

Platz für weitere Ausführungen

Auswertung

Punkte	Note	Punkte	Note
58	1	28	4,5
57	1	27	4,5
56	1	26	4,5
55	1	25	4,5
54	1,5	24	4,5
53	1,5	23	4,5
52	1,5	22	5
51	1,5	21	5
50	2	20	5
49	2	19	5
48	2	18	5
47	2	17	5
46	2,5	16	5
45	2,5	15	5
44	2,5	14	5,5
43	2,5	13	5,5
42	3	12	5,5
41	3	11	5,5
40	3	10	5,5
39	3	9	5,5
38	3,5	8	5,5
37	3,5	7	5,5
36	3,5	6	6
35	3,5	5	6
34	4	4	6
33	4	3	6
32	4	2	6
31	4	1	6
30	4,5	0	6
29	4,5		

erreichte Punkte	Note