Dr. Michael Gieding
www.ph-heidelberg.de/wp/gieding

EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE

SKRIPT ZUR GLEICHNAMIGEN VORLESUNG IM WINTERSEMESTER 2007/2008

KAPITEL 1
AXIOMATIK

Vorlesung 8: Dreieckskongruenz

1 Die zwei Aspekte des Kongruenzbegriffs

1.1 Der naive Begriff der Deckungsgleichheit

Wenn zwei Figuren genau aufeinander passen, so sind sie kongruent.

Propädeutische Begriffsauffassung, die mathematisch exakter darauf hinausläuft, dass zwei Figuren genau dann zueinander kongruent sind, wenn es eine abstandserhaltende Abbildung der Ebene auf sich gibt, die die eine Figur auf die andere abbildet.

1.2 Dreieckskongruenz

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Winkeln und in allen Seiten übereinstimmen.

2 Dreieckskongruenz

2.1 Streckenkongruenz

Definition K/1: (Streckenkongruenz)

Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ heißen genau dann kongruent zu einander, wenn sie beide dieselbe Länge haben.

In Zeichen: $\overline{AB} \cong \overline{CD} :\Leftrightarrow |\overline{AB}| = |\overline{CD}|$

Satz K/1:

Die Relation „kongruent“ auf der Menge aller Strecken ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: trivial durch Rückführung auf die Gleichheitsrelation

2.2 Winkelkongruenz

Definition K/2: (Winkelkongruenz)

Zwei Winkel α und β heißen genau dann kongruent zu einander, wenn sie beide dieselbe Größe haben.

In Zeichen: $\alpha \cong \beta :\Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|$

Satz K/2:

Die Relation „kongruent“ auf der Menge aller Winkel ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: trivial durch Rückführung auf die Gleichheitsrelation

2.3 Dreieckskongruenz

Definition K/3: (Dreieckskongruenz)

Zwei Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ heißen genau dann kongruent zu einander, wenn

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

$$\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE, \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF, \measuredangle ACB \cong \measuredangle DEF$$

Formulierung in der Schule: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Stücken übereinstimmen.

2.4 Das Kongruenzaxiom SWS

Axiom K: (SWS)

Es seien $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ zwei Dreiecke.

Wenn $\overline{AB} \cong \overline{DE} \wedge \overline{AC} \cong \overline{DF} \wedge \measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$ dann $\overline{ABC} \cong \overline{DEF}$.

Formulierung in der Schule: Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und in dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

3 Folgerungen, wichtige Sätze der absoluten Geometrie

3.1 Absolute Geometrie?

Unter absoluter Geometrie versteht man die Geometrie die sich auf der Grundlage unserer bisherigen Axiome betreiben lässt. Bisher haben wir zwar definiert, was wir unter der Parallelität von Geraden verstehen wollen. Die Existenz von zueinander parallelen Geraden haben wir jedoch noch nicht nachgewiesen. Wir werden das jetzt nachholen. Es wird uns jedoch nicht gelingen die entsprechende Eindeutigkeit nachzuweisen. Dazu wird es eines weiteren Axioms bedürfen. Das uns fehlende Axiom heißt Euklidisches Parallelenaxiom. Ihm wird die gesamte folgende Vorlesung 9 gewidmet sein. Bis dahin wissen wir nichts von seiner Existenz. Unsere in der Euklidischen Geometrie gewiss richtige Vorstellung, dass es in der Ebene zu einer gegebenen Geraden g und einem Punkt P außerhalb von g genau eine Gerade h gibt, die durch P geht und zu g parallel ist, hat momentan noch keine Gültigkeit. Letztere Aussage über die Gerade h ist der Inhalt des Euklidischen Parallelenaxioms. Um es noch einmal zu verdeutlichen: In dieser Vorlesung wird absolute Geometrie betrieben, das heißt eine Geometrie in der alle Axiome gelten, die auch in der aus der Schule gewohnten Euklidischen Geometrie gelten, außer dem Parallelenaxiom.

3.2 Do you remember? Wichtige bereits bewiesene Aussagen

Übungsaufgabe:

In den folgenden Beweisen werden wir häufig auf folgendes verweisen:

1. Existenz und Eindeutigkeit des Streckenantragens
2. Existenz und Eindeutigkeit des Winkelantragens
3. Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunktes einer Strecke
4. Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten zu einer gegebenen Geraden in einem Punkt dieser Geraden.

Formulieren Sie, was unter den Punkten 1. Bis 4. genau zu verstehen ist. Stellen Sie dar wann und wie diese Existenzen und Eindeutigkeiten bereits bewiesen bzw. gefordert wurden.

3.3 Hilfssätze (Lemmata, Korollare)

Lemma K/1: (Durchschnitt konvexer Punktmengen)

Der Durchschnitt zweier konvexer Punktmengen ist konvex.

Beweis: Übungsaufgabe

Korollar K/1:

Das Innere eines Winkels ist konvex.

Beweis:

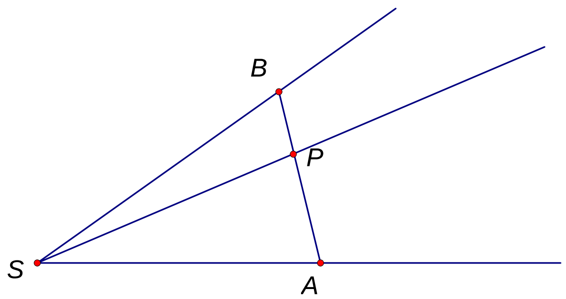
Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Lemma K/1 und der Definition der Definition W/2 (Vorlesung 7)[1].

Lemma K/2: (Geschichten aus dem Inneren I)

Gegeben seien drei nicht kollineare Punkte *A*, *B*, *S*. Wenn *P* ein Punkt der offenen Strecke $\overline{AB}$ ist, dann liegt der Strahl SP^+ vollständig im Inneren von $\measuredangle ASB$.

Beweis:

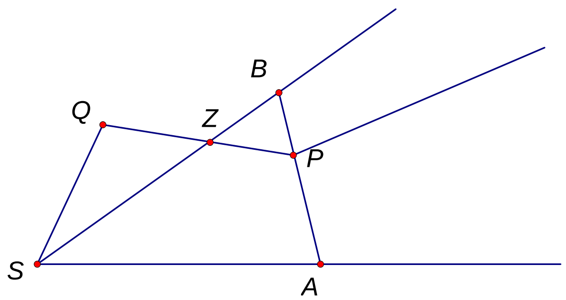
Es sei *P* also ein Punkt der offenen Strecke $\overline{AB}$. Der Punkt *S* ist der Scheitel des Winkels $\measuredangle ASB$:



Nach Korollar K/1 ist *P* ein Punkt des Inneren von $\measuredangle ASB$.

Wir haben zu zeigen, dass der Strahl SP^+ vollständig im Inneren von $\measuredangle ASB$ liegt.

Hierzu nehmen wir an, dass es auf dem Strahl SP^+ einen Punkt Q gibt, der nicht im Inneren von $\measuredangle ASB$ liegt:



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gehen wir davon aus, dass Q in der Halbebene SBA^- liegt[2]. Weil *P* und *Q* jetzt bezüglich der Geraden *SB* in verschiedenen Halbebenen liegen, wird die Strecke $\overline{QP}$ durch die Gerade *SB* in einem Punkt geschnitten, den wir *Z* nennen wollen (Man erinnere sich daran, wie Halbebenen definiert sind.) Jetzt gilt Folgendes:

1. Die Geraden *SB* und *SP* gehen beide selbstverständlich durch den Punkt *S*.
2. *Z* ist ein Punkt sowohl der Geraden *SP* als auch der Geraden *SB*.

Nach den Inzidenzaxiomen geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade. Wegen 1. und 2. sind die Geraden *SB* und *SP* somit identisch.

[1] Unter einem Korollar versteht man eine Folgerung aus einer bereits bewiesen Aussage, die sich unmittelbar und ohne großen Aufwand ergibt.

[2] Falls nicht: Umbennenung

Der Punkt *P* ist also ein Punkt der Geraden *SB*. Er liegt als Punkt der offenen Strecke $\overline{AB}$ aber auch auf der Geraden *AB*. Letztere ist von der Geraden *SB* verschieden. Wäre sie es nicht, würden nach den Inzidenzaxiomen die beiden durch die Schenkel des Winkels bestimmten Geraden zusammenfallen, was ein Widerspruch dazu wäre, dass die Punkte *A*, *B*, *S* nicht kollinear sind.

Zwei verschiedene Geraden haben höchsten einen Punkt gemeinsam. Für die beiden Geraden *AB* und *SB* ist dieses der Punkt *B*. Da nach unseren bisherigen Überlegungen auch der Punkt *P* ein Schnittpunkt der Geraden *AB* und *SB* ist, müssen die beiden Punkte *P* und *B* zusammenfallen. Das ist allerdings ein Widerspruch dazu, dass *P* ein Punkt der offenen Strecke $\overline{AB}$ ist.

Die Annahme, dass es auf SP^+ einen Punkt geben könnte, der nicht im Inneren von $\measuredangle ASB$ liegt, ist somit zu verwerfen. Also liegt der gesamte Strahl SP^+ im Inneren von $\measuredangle ASB$.

Korollar K/2:

Liegt ein Punkt *P* im Inneren eines Winkels mit dem Scheitel *S*, dann liegt der gesamte Strahl SP^+ im Inneren des Winkels.

Das Korollar wurde im Verlaufe des Beweises von Lemma K/2 mit bewiesen. Wir hätten es auch dem Lemma als eigenständiges Lemma voranstellen können und separat beweisen. Lemma K/2 wäre dann eine unmittelbare Folgerung aus dem Korollar K/2.

Lemma K/3: (Geschichten aus dem Inneren II)

Es seien *A*, *B* und *S* drei nicht kollineare Punkte. Wenn *P* ein Punkt aus dem Inneren von $\measuredangle ASB$ ist und weder auf SB^+ noch auf SA^+ liegt, dann schneidet der Strahl SP^+ die Strecke $\overline{AB}$.

Beweis:

Unsere folgenden Überlegungen beziehen sich auf die Ebene, die durch die drei Punkte *A*, *B* und *S* eindeutig bestimmt ist.

P sei also ein Punkt aus dem Inneren von $\measuredangle ASB$. P möge dabei weder auf SB^+ noch auf SA^+ liegen.

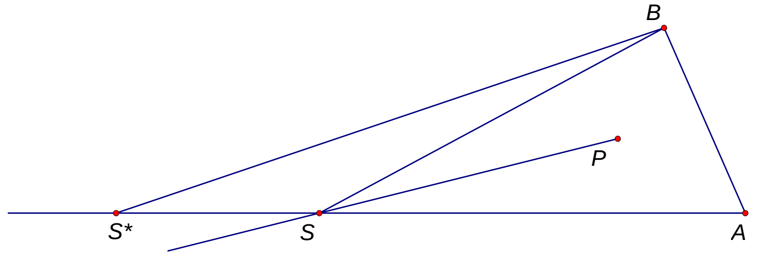
Fall 1:

S und *P* liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden *AB*.

In diesem Fall schneidet die Strecke $\overline{SP}$ und damit der Strahl SP^+ die Gerade *AB*. Da der Strahl SP^+ nach Korollar K/2 vollständig im Inneren von $\measuredangle ASB$ liegt, kann er die Gerade *AB* nur in der Strecke $\overline{AB}$ schneiden.

Fall 2:

S und *P* liegen auf ein und derselben Seite von *AB*.



Es sei S^* ein Punkt mit Zw(S^*,S,A). Die Gerade SP schneidet das Dreieck $\overline{S^*AB}$ in der Seite $\overline{S^*A}$. Sie kann durch keinen der drei Eckpunkte des Dreiecks $\overline{S^*AB}$ gehen.[3] Nach dem Satz von Pasch muss jetzt entweder die Seite $\overline{AB}$ oder die Seite $\overline{S^*B}$ durch SP geschnitten werden.

Wenn wir zeigen können, dass SP die Seite $\overline{AB}$ schneidet, sind wir fertig.[4]

Wir nehmen an, dass SP die Seite $\overline{S^*B}$ schneidet. Für die weitere Beweisführung untersuchen wir die Lage der Strecke $\overline{S^*B}$:

Die Strecke $\overline{S^*A}$ wird wegen Zw(S^*,S,A) durch die Gerade SB geschnitten. Demzufolge liegen die Punkte S^* und A in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden SB. Dementsprechend ist S^* kein Punkt aus dem Inneren von $\measuredangle ASB$. Kein Punkt der offenen Strecke $\overline{S^*B}$ kann ein Schnittpunkt von der Strecke mit der Geraden SB sein. Wäre dem nämlich so, würde S^* mit S zusammenfallen, was wegen Zw(S^*,S,A) nicht möglich ist.

Alle Punkte der Strecke $\overline{S^*B}$ liegen damit im Äußeren des Winkels $\measuredangle ASB$. Da die Strecke $\overline{S^*B}$ nur durch SP^+ und nicht durch SP^- [5]geschnitten werden könnte und SP^+ und $\overline{S^*B}$ in verschiedenen Halbebenen liegen, kann SP^+ die Strecke $\overline{S^*B}$ nicht schneiden. Nach Pasch folgt, dass SP^+ die Strecke $\overline{AB}$ schneidet.

3.4 Der Basiswinkelsatz

Definition K/4: (gleichschenkliges Dreieck)

Ein Dreieck mit zwei zu einander kongruenten Seiten heißt gleichschenklig. Die beiden zu einander kongruenten Seiten heißen die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks. Die weitere dritte Seite des gleichschenkligen Dreiecks heißt seine Basis. Die Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks für die gilt, dass die Basis eine Teilmenge eines ihrer Schenkel ist, heißen Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks.

Satz K/1: (Basiswinkelsatz)

In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander kongruent.

Beweis: Übungsaufgabe

3.5 Mittelsenkrechten

Definition K/5: (Mittelsenkrechte)

Eine Gerade heißt Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ wenn sie senkrecht auf AB steht und durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ geht.

Satz K/2: (Mittelsenkrechtenkriterium)

Eine Punktmenge ist genau dann die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$, wenn sie alle Punkte enthält, die sowohl zu A als auch zu B denselben Abstand haben.

Übungsaufgabe: Man informiere sich darüber, was man in der Mathematik unter einem Kriterium versteht und beweise Satz K/2. Man begründe ferner, warum im Satz K/2 von der Mittelsenkrechte einer Strecke gesprochen werden darf.

---

[3] Der Leser überzeuge sich davon.

[4] Weil $\overline{AB}$ im Inneren des Winkels $\measuredangle ASB$ liegt kann nur der Teil von AB, der im Inneren von $\measuredangle ASB$ liegt, die Strecke $\overline{AB}$ schneiden. Dieser Teil ist nun aber gerade SP^+.

[5] Der Leser überzeuge sich davon.

3.6 Der Kongruenzsatz WSW

Übungsaufgabe, man formuliere den Dreieckskongruenzsatz WSW in mathematisch exakter Form und beweise ihn.

3.7 Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade

Definition K/6: (Lot, Lotgerade)

Es sei g eine Gerade und P ein Punkt der nicht zu g gehört. Die Gerade l die senkrecht auf g steht und durch den Punkt P geht heißt das Lot von P auf g. Der Schnittpunkt L von l mit g heißt der Fußpunkt des Lotes von P auf g. Wenn wir von der Länge des Lotes von P auf g sprechen so meinen wir die Länge der Strecke $\overline{PL}$.

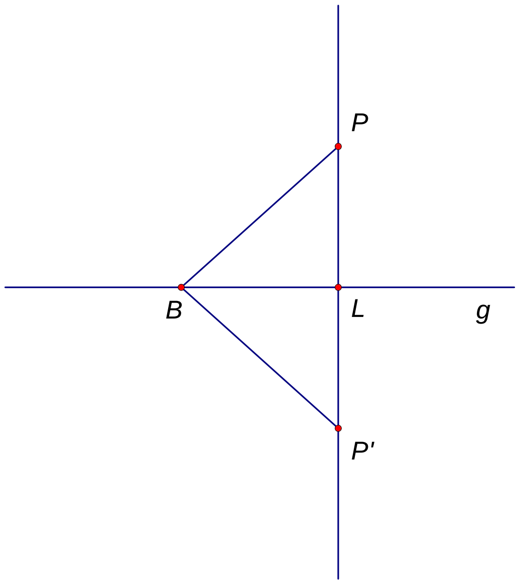
Satz K/3: (Existenz und Eindeutigkeit des Lotes)

Zu jeder Geraden und jedem Punkt außerhalb der Geraden gibt es genau ein Lot.

Beweis:

Existenz:

Es sei g eine Gerade und P ein Punkt außerhalb von g.



B sei ein beliebiger Punkt auf g. Falls $PB \perp g$ wären wir fertig.

Übungsaufgabe: führen Sie den Beweis entsprechend der Skizze zu Ende.

Eindeutigkeit: Übungsaufgabe

3.8 Der schwache Außenwinkelsatz