2 Übungsaufgaben Serie II

2.1 Aufgabe 1

2.1.1 Die Aufgabe 1

Aufgabe 2.1

Ein Beweis aus der Zahlentheorie

Satz 2.1

Jeder Teiler t eines Teilers T ist auch eine Teiler aller Vielfachen v von T.

a) *Formulieren Sie Satz 2.1 in „Wenn-Dann“ Formulierung.*

b) *Formulieren Sie Satz 2.1 möglichst formal mittels formaler mathematischer Zeichensprache.*

c) *Geben Sie ein Beispiel für die Gültigkeit von Satz 2.1 an.*

d) *Beweisen Sie den Satz 2.1.*

2.1.2 Lösung der ersten Aufgabe

a) Formulieren Sie Satz 2.1 in „Wenn-Dann“ Formulierung:
Lösungsvarianten:

- Wenn t ein Teiler von T ist und v ein Vielfaches von T, dann ist v auch ein Vielfaches von t.
- Wenn t eine Teiler von T und T ein Teiler von v, dann ist t auch ein Teiler von v. (Vielfaches adäquat durch Teiler ersetzt, mathematisch bleibt das äquivalent.)
- $t|T \wedge T|v \Rightarrow t|v$
  (Vorangegangene Version ganz formal.)
- Wenn v ein Vielfaches von T und T ein Vielfaches von t, dann ist v ein Vielfaches von t.
  (Wie zuvor nur Teilereigenschaft als Vielfacheneigenschaft.)
- $\exists n, m \in \mathbb{N} : n \cdot t = T \wedge m \cdot T = v \Rightarrow \exists o \in \mathbb{N} : o \cdot t = v$.
  wie die formale Formulierung mit den Teilern, Teilereigenschaft aber schon übersetzt.

Hinweise: Versuchen Sie den Sinn des Satzes zu erfassen. In der Schule wurden Sie zu sehr auf Formalismen getrimmt. Sicherlich läst sich vieles rein syntaktisch entsprechender Schemata erledigen, richtig liegt man in der Regel nur, wenn man auch den Sinn dabei erfasst. Auf Folgendes sollten Sie achten:
Eine Implikation ist häufig eine Allaussage:

- Für jeden Teiler t von T gilt: „bla bla bla“
  formal:

- $\forall t : t|T :$ „bla bla bla" bzw.
  $\forall t, t|T :$ „bla bla bla" bzw.
  $\forall t$ mit $t|T :$ „bla bla bla"
  bedeutet:
- Sollte t ein Teiler von T sein, dann gilt „bla bla bla".
  Oder anders ausgedrückt:
- Wenn t ein Teiler von T ist, dann gilt „bla bla bla". In der Formelsprache lässt man das Wenn dann weg. Der Mathematiker weiß, dass er es mitlesen muss:
- $t|T \rightarrow$ „bla bla bla"

Noch mal zum speziellen Fall:
Im vorliegende Fall hatten wir zwei Allaussagen:

- Für alle Teiler von T
- Für alle Vielfachen von T
- gilt: die Vielfachen sind auch Vielfache der Teiler von T.

Daraus wird in „wenn dann" unter Berücksichtigung dessen, dass zwei Voraussetzungen vorliegen:
Wenn t ein Teiler von T und v eine Vielfaches von T ist, dann ist v auch ein Vielfaches von t.

b) $t|T \wedge T|v \Rightarrow t|v$

c) $3|12 \wedge 12|24 \Rightarrow 3|24$

d) Der Beweis:

V1: $t|T$

V2: $T|v$

B: $t|v$

(I) $\exists m \in \mathbb{N} : m \cdot t = T$ (wegen V1)

(II) $\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot T = v$ (wegen V2)

(III) $n \cdot (m \cdot t) = n \cdot m \cdot t = (n \cdot m) \cdot t = v$ (I in II)

Mit $n \cdot m$ existiert eine natürliche Zahl, die mit t multipliziert v ergibt. Damit ist t ein teiler von v bzw. umgekehrt v ein Vielfaches von t. q.e.d.

2.2 Aufgabe 2

2.2.1 Die Aufgabe 2

Aufgabe 2.2

Dreieckskongruenzsätze

a) *Formulieren Sie die Dreieckskongruenzsätze SSS, WSW und SWS als Implikationen in der Form „Wenn-Dann“.*

b) *Formulieren Sie die Umkehrungen Dreieckskongruenzsätze SSS, WSW und SWS als Implikationen in der form „Wenn-Dann“.*

c) *Auch die Umkehrungen der Dreieckskongruenzsätze sind wahr. Formulieren Sie die Dreieckkongruenzsätze als Äquivalenzen.*

d) *Illustrieren Sie die Dreieckskongruenzsätze mittels Skizzen.*

e) *In der Schule konstruieren die Schüler Dreiecke nach den Dreieckskongruenzsätzen. Formulieren Sie zu jedem der drei genannten Dreieckskongruenzsätze eine konkrete Konstrultionsaufgabe.*

f) *Formulieren Sie schülergerechte Konstruktionsbeschreibungen für Dreieckskonstruktionen nach den genannten Dreieckskongruenzsätzen.*

2.2.2 Lösung von Aufgabe 2

a) Es seien A, B, C und D, E, F drei jeweils nichtkollineare Punkte.

SSS	$\overline{AB} \cong \overline{DE} \wedge \overline{BC} \cong \overline{EF} \wedge \overline{AC} \cong \overline{DF} \Rightarrow \overline{ABC} \cong \overline{DEF}$
SWS	$\overline{CA} \cong \overline{FD} \wedge \angle CAB \cong \angle FDE \wedge \overline{AB} \cong \overline{DE} \Rightarrow \overline{ABC} \cong \overline{DEF}$
WSW	$\angle CAB \cong \angle FDE \wedge \overline{AB} \cong \overline{DE} \wedge \angle ABC \cong \angle DEF \Rightarrow \overline{ABC} \cong \overline{DEF}$

b) Es seien A, B, C und D, E, F drei jeweils nichtkollineare Punkte. Die Umkehrungen lauten:

SSS	$\overline{ABC} \cong \overline{DEF} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{DE} \wedge \overline{BC} \cong \overline{EF} \wedge \overline{AC} \cong \overline{DF}$
SWS	$\overline{ABC} \cong \overline{DEF} \Rightarrow \overline{CA} \cong \overline{FD} \wedge \angle CAB \cong \angle FDE \wedge \overline{AB} \cong \overline{DE}$
WSW	$\overline{ABC} \cong \overline{DEF} \Rightarrow \angle CAB \cong \angle FDE \wedge \overline{AB} \cong \overline{DE} \wedge \angle ABC \cong \angle DEF$

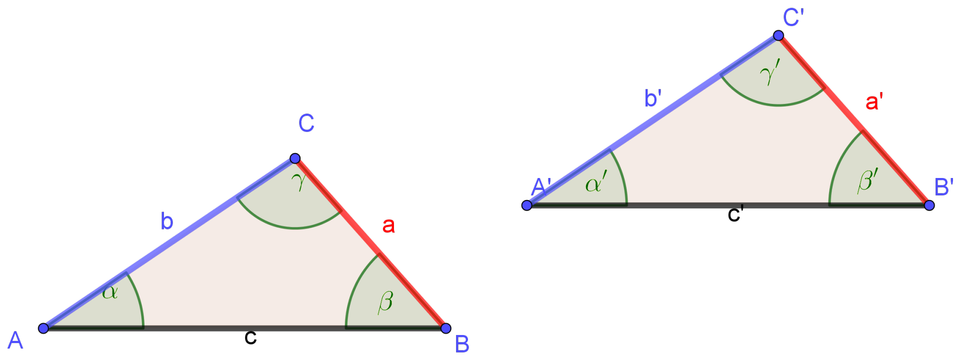
c) Es seien A, B, C und D, E, F drei jeweils nichtkollineare Punkte.

SSS	$\overline{AB} \cong \overline{DE} \wedge \overline{BC} \cong \overline{EF} \wedge \overline{AC} \cong \overline{DF} \Leftrightarrow \overline{ABC} \cong \overline{DEF}$
SWS	$\overline{CA} \cong \overline{FD} \wedge \angle CAB \cong \angle FDE \wedge \overline{AB} \cong \overline{DE} \Leftrightarrow \overline{ABC} \cong \overline{DEF}$
WSW	$\angle CAB \cong \angle FDE \wedge \overline{AB} \cong \overline{DE} \wedge \angle ABC \cong \angle DEF \Leftrightarrow \overline{ABC} \cong \overline{DEF}$

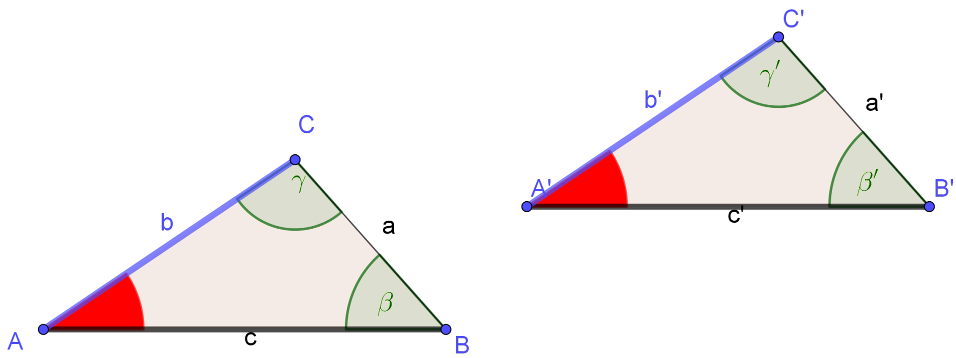
Für die Lösung wurde nur kopiert. Ich die Lösung von Teilaufgabe a) kopiert und eingefügt. Dann wurden die Pfeile ersetzt. Aus Rightarrow wurde Leftrightarrow. Dasselbe hätte ich auch mit der Tabelle aus b) machen können. Keine der beiden Seiten einer Äquivalenz ist vor der anderen ausgezeichnet. Es ist dann also egal welche Aussage links und welche rechts steht.

d) Die Skizzen: Zwei Dreiecke, gemeinsame Stücke werden hervorgehoben:

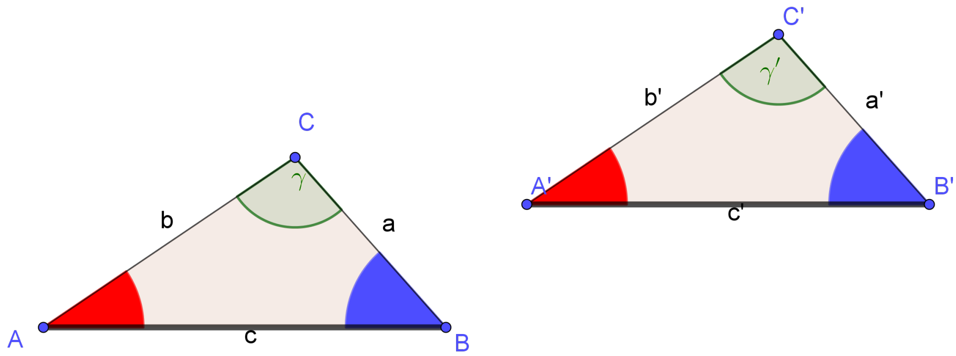
- SSS



- SWS



- SWS



e) Konstruktionsaufgaben:
Wir gehen von den schulüblichen Bezeichnungen aus. Konstruiere eine Dreieck $\overline{ABC}$ mit den folgenden Eigenschaften:

SSS	$a = 3cm,\ b = 4cm,\ c = 5cm.$
SWS	$b = 3cm,\ \alpha = 40°,\ c = 5cm.$
WSW	$\alpha = 30°,\ c = 4cm,\ \beta = 45°.$

f) Konstruktionsbeschreibungen:

- SSS
  1. Zeichne eine Strecke $\overline{AB} = c = 5cm$.
  2. Zeichne um A einen Kreis mit dem Radius b.
  3. Zeichen um B einen Kreis mit dem Radius a.
  4. Die beiden Kreise haben zwei Schnittpunkte, wähle einen dieser Schnittpunkte aus und bezeichne ihn mit C.
  5. Zeichne die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.
- SWS: Das können Sie selbst (Sie sollten es üben. Es könnte sein, dass es eine entsprechende Klausuraufgabe gibt.)
- WSW: Das können Sie selbst (Sie sollten es üben. Es könnte sein, dass es eine entsprechende Klausuraufgabe gibt.)
- Und wenn Sie schon dabei sind, üben Sie auch die Konstrauktion nach SsW.

2.3 Aufgabe 3

2.3.1 Die Aufgabe 3

Aufgabe 2.3

Trapeze

a) *Definieren Sie den Begriff Trapez mittels der Relation der Parallelität von Geraden bzw. Strecken.*

b) ***Satz 2.2***

Diagonaleneigenschaft von Trapezen
Die Diagonalen eines Trapezes teilen einander im selben Verhältnis.

Formulieren Sie Satz 2.2 in der Form „Wenn-Dann“.

c) *Wir betrachten das Trapez $\overline{ABCD}$ mit*

$$A = (0,0), B = (10,0), C = (5,5), D = (0,5).$$

Zeichnen Sie $\overline{ABCD}$ in ein kartesisches Koordinatensystem und verifizieren Sie Satz 2.2

(a) *durch Ausmessen*

(b) *rechnerisch.*

d) *Beweisen Sie Satz 2.2. Hinweis: Strahlensätze sind hilfreich.*

e) *Klaus definiert:*

Definition 2.1

Trapez
Ein Viereck, dessen Diagonalen einander im selben Verhältnis schneiden, heißt Trapez.

Beweisen Sie die Korrektheit von Definition 2.1.

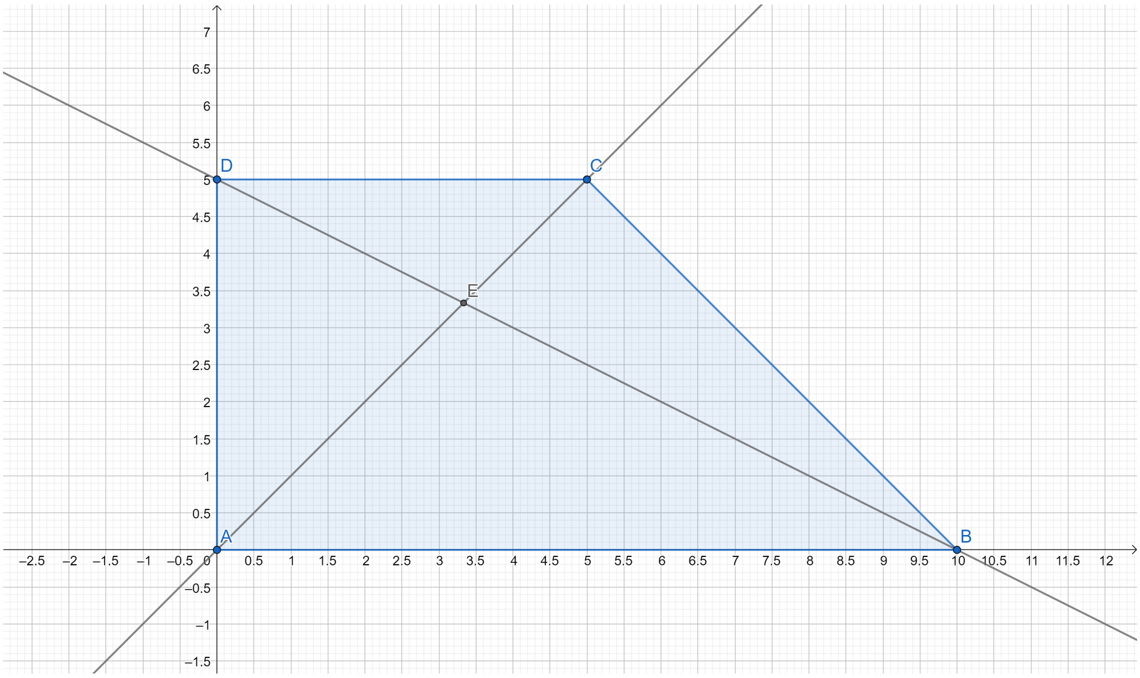
2.3.2 Lösung von Aufgabe 3

a)
- Richtige Lösungen:
  - Wenn in einem Viereck zwei Seiten zueinander parallel sind, dann heißt dieses Viereck Trapez.
  - Vierecke mit einem Paar paralleler Seiten sind Trapeze.
  - $\overline{ABCD}$ ist ein Trapez $:= AB \| CD$
- Falsche Lösungen
  - Wenn ein Viereck ein Trapez ist, dann sind zwei seiner Seiten parallel. (Falscher Zusammenhang von Begriffsbezeichnung und definierender Eigenschaft.)

– Vierecke mit genau einem Paar zueinander paralleler Seiten sind Trapeze. (Parallelogramm werden ausgeschlossen.)
– Ein Viereck ist ein Trapez, wenn es zwei zueinander parallele Seiten und zwei Paare supplementärer Innenwinkel hat. (Zu viel, Parallelität impliziert die entsprechenden Supplementwinkel.)

b) Wenn ein Viereck ein Trapez ist, dann teilen sich seine Diagonaln im selben Verhältnis.

c) `https://www.geogebra.org/geometry/v2ccyqv5`



Berechnung:

(I) $DC \| AB$ (ergibt sich aus den Koordinaten)

(II) $|DC| = 5$ (ergibt sich aus den Koordinaten)

(III) $|AB| = 10$ (ergibt sich aus den Koordinaten)

(IV) $\frac{|DC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|BE|} \wedge \frac{|DC|}{|CE|} = \frac{|AB|}{||AE|}$ (I) und Strahlensatz 2.

(V) $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BE|} = \frac{|CE|}{|AE|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (Umstellen von (IV) und Einsetzen von (II), (III).

d) Allgemeiner Beweis: Es sei $\overline{ABCD}$ ein Viereck mit $AB \| CD$. E sei der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

(I) $DC \| AB$ (Voraussetzung, Trapez)

(II) $\frac{|DC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|BE|} \wedge \frac{|DC|}{|CE|} = \frac{|AB|}{||AE|}$ (I) und Strahlensatz 2.

(III) $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BE|} = \frac{|CE|}{|AE|}$ (Umstellen von (II).

e) Wir haben gerade bewiesen, dass sich in jedem Trapez entsprechend der Parallelendefinition die Diagonalen im seleben Verhältnis schneiden. Wenn wir die Umkehrung dieses Satzes beweisen, haben wir auch die Korrektheit der Definition von Klaus bewiesen. Es sei also $\overline{ABCD}$ ein Viereck dessen Diagonalen sich im Punkt E derart schneiden, dass $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BE|}{|ED|}$ gilt. Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes gilt $AB \| CD$. Das Viereck ist also ein Trapez.

2.4 Aufgabe 4

2.4.1 Die Aufgabe 4

Aufgabe 2.4

Trapeze auf dem Heidelberger Winkelkreuz

Unter `http://|/heidelberger-winkelkreuz.de/?page_id=62` *finden Sie eine mit Geogebra erstellte Applikation zum Heidelberger Winkelkreuz (HWK). Default ist beim ersten Besuch der Seite das Viereck* $(Blau, Orange, Gelb, Lila)$ *bzw.* (B, O, G, L) *gespannt.*

a) *Wir verändern den Winkel zwischen den Schenkeln des HWK nicht. Wie viele verschiedene Trapeze, die keine Parallelogramme und keine symmetrischen Trapeze sind, kann man jetzt spannen? Beschreiben Sie die Trapeze durch Angabe der zum Spannen verwendeten Farbwerte.*

b) *Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe a).*

c) *Wieviele verschiedene Parallelogramme lassen sich bei festem Winkel zwischen den Schenkeln des HWK spannen. Beschreiben Sie alle spannbaren Parallelogramme mittes der entsprechenden Farbwertfolgen.*

d) *Verallgemeinern Sie die Farbwertfolgen der auf dem HWK spannbaren Parallelogramme.*

e) *Interpretieren Sie die Verallgemeinerung der vorangegangenen Teilaufgabe und definieren Sie den Begriff Parallelogramm mittels dieser Verallgemeinerung.*

f) *Beweisen Sie die Äquivalenz ihrer Parallelogrammdefinition mit der in der Onlinevorlesung vom 8.Mai vorgestellten Parallelogrammdefinition.*

2.4.2 Lösung von Aufgabe 4

a) Wir zeichnen einen Schenkel aus, auf dem wir beginnen und gehen dann mathematisch positiv bei der Beschreibung vor. Die folgenden Reihenfolgen sind die einzigen, die allegmeine Trapeze auf dem HWK generieren:

1. (Lila, Gelb, Orange, Orange)
2. (Orange, Lila, Gelb, Orange)

b) Wir ersetzen die Farbwerte durch die Abstände zur Mittelschraube:

Lila	4
Blau	3
Orange	2
Gelb	1

Wir interpretieren jetzt die entsprechenden Diagonalenabschnitte:

1: $\frac{Lila}{Orange} = \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{Gelb}{Orange} = \frac{1}{2}$

2: $\frac{Orange}{Gelb} = \frac{2}{1} = 2$, $\frac{Lila}{Orange} = \frac{4}{2} = 2$

c) 10 Möglichkeiten:

1. (L,L,L,L) (Spezialfall Rechteck)
2. (L,B,L,B)
3. (L,O,L,O)
4. (L,G,L,G)
5. (B,B,B,B) (Spezialfall Rechteck)
6. (B,O,B,O)
7. (B,G,B,G)
8. (O,O,O,O) (Spezielfall Rechteck)
9. (O,G,O,G)
10. (G,G,G,G) (Spezialfall Rechteck)

d) (Farbe1, Farbe2, Farbe1, Farbe2)

e) (Abstand 1, Abstand 2, Abstand 1, Abstand 2) D.h. Die Diagonalen halbieren einander.

Definition 2.2

Wenn sich in einem Viereck die Digonalen gegenseitig halbieren , dann heißt das Viereck Parallelogramm.

f) Das ist jetzt einfach. Dazu brauchen Sie mich nicht. (Keine Zeit mehr)