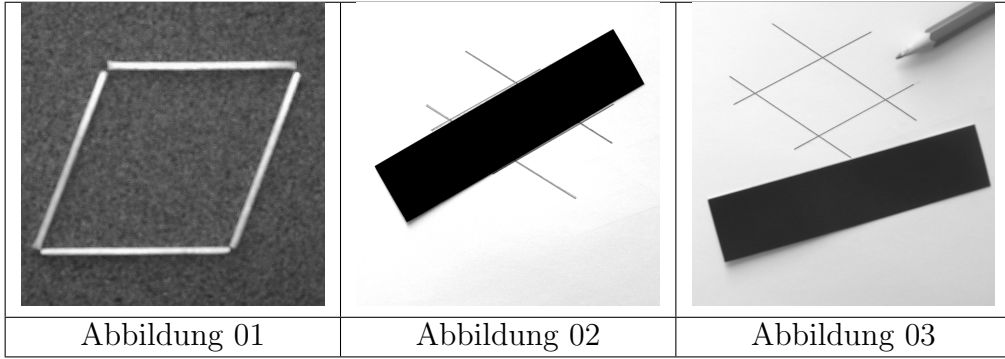


PH Heidelberg, Fach Mathematik
Klausur zur Akademischen Teilprüfung, Modul 2
Einführung in die Geometrie



Pleite gegen Gladbach
Bayerns böses Déjà-vu
Von Tim Röhn, Mönchengladbach



Eine bittere Niederlage und ein verletzter Spieler: Der Rückrund Bayern bei Borussia Mönchengladbach ging komplett daneben. O



Aufgabe 1: Definieren

Nr.	Aufgabe	Punkte.							
a)	Definieren Sie den Begriff <i>Dreieck</i> \overline{ABC} . Es seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte. Unter dem Dreieck \overline{ABC} versteht man die folgende Menge: $\overline{ABC} := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$.	2							
b)	Ergänzen Sie unter Verwendung der Punkte A, B, C, D, E, F : Die beiden Winkel $\angle ABC$ und $\angle DEF$ bilden ein Paar von <i>Nebenwinkeln</i> , wenn ... $B \equiv E \wedge C \in BA^+ \wedge F \in BC^-$	3							
c)	Ergänzen Sie: Unter den Innenwinkeln des Dreiecks \overline{ABC} versteht man ... die Winkel $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$.	3							
d)	Ergänzen Sie: Der Winkel φ ist ein Außenwinkel des Dreiecks \overline{XYZ} , wenn ... er ein Nebenwinkel zu einem der Innenwinkel von \overline{XYZ} ist.	3							
e)	Definition: (<i>schön</i>) Eine ebene Figur \mathcal{F} ist <i>schön</i> , wenn es eine Gerade g derart gibt, dass gilt: $\forall P \in \mathcal{F} \exists Q \in \mathcal{F}: g$ ist die Mittelsenkrechte von \overline{PQ} . Nennen Sie <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; padding: 5px;">ein <i>schönes</i> Viereck, das kein Trapez ist,</td> <td style="width: 33%; padding: 5px;">eine <i>schöne</i> krummlinige Figur, die kein Kreis ist,</td> <td style="width: 33%; padding: 5px;">eine <i>schöne</i> Figur, die die Schüler auch als Graph einer Funktion kennen lernen.</td> </tr> <tr> <td style="width: 33%; padding: 5px; text-align: center;">Drachen</td> <td style="width: 33%; padding: 5px; text-align: center;">Halbkreis</td> <td style="width: 33%; padding: 5px; text-align: center;">Parabel</td> </tr> </table>	ein <i>schönes</i> Viereck, das kein Trapez ist,	eine <i>schöne</i> krummlinige Figur, die kein Kreis ist,	eine <i>schöne</i> Figur, die die Schüler auch als Graph einer Funktion kennen lernen.	Drachen	Halbkreis	Parabel	3	
ein <i>schönes</i> Viereck, das kein Trapez ist,	eine <i>schöne</i> krummlinige Figur, die kein Kreis ist,	eine <i>schöne</i> Figur, die die Schüler auch als Graph einer Funktion kennen lernen.							
Drachen	Halbkreis	Parabel							
f)	Geben Sie eine Definition für den Begriff <i>Zentriwinkel</i> in der ebenen Geometrie an. Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M . Der Winkel φ ist bezüglich k ein Zentriwinkel, wenn M sein Scheitel ist.	2							
g)	Definieren Sie unter der Verwendung des Begriffs <i>Zentriwinkel</i> den Begriff <i>Viertelkreis</i> . Es sei φ ein Zentriwinkel bezüglich eines Kreises k . Ferner habe φ die Größe $ \varphi = 90$. Die Schnittmenge $I \varphi \cap k$ heißt Viertelkreis.	2							
h)	Definieren Sie \overline{ABCD} ist <i>konvex</i> ohne Verwendung des Begriffs <i>Inneres</i> dafür aber unter Verwendung der beiden Strecken \overline{AC} und \overline{BD} . Definition: \overline{ABCD} ist <i>konvex</i> , wenn ... $\overline{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$.	2							

Aufgabe 2: Argumentieren, Begründen, Beweisen

Alle Teilaufgaben von Aufgabe 2 beziehen sich auf ein Dreieck \overline{ABC} mit der Eigenschaft (*) $|AC| < |BC| < |AB|$.

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Begründen Sie durch Nennung eines Axioms: $\exists a, b \in \mathbb{R} : a = BC \wedge b = AC $ Abstandsaxiom	1	
b)	Begründen Sie: $\angle CAB \not\cong \angle CBA$ Annahme: $\angle CAB \cong \angle CBA$ Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes müssten jetzt zwei Seiten von \overline{ABC} kongruent sein. Das wäre ein Widerspruch zu (*).	3	
c)	Begründen Sie durch Nennung eines Axioms: $\exists A' \in CB^+ \wedge \exists B' \in CA^+ : CA' = CA = b \wedge CB' = CB = a$ Axiom vom Lineal	1	
d)	Es sei A' der Punkt aus Teilaufgabe c) auf CB^+ . Beweisen Sie: $Zw(C, A', B)$. Nach Konstruktion gilt $A' \in CB^+$. Damit kann nur $Zw(C, A', B) \vee Zw(C, B, A')$ gelten. Aus $Zw(C, B, A')$ und $ CA' = AC $ würde $ CB + BA' = CA' = AC $ folgen. Weil alle unsere Abstände größer als 0 sind, würde $ CB = BC < CA' = AC $ gelten. Widerspruch zu (*).	4	
e)	A' und B' seien die Punkte aus c). Sie dürfen für den folgenden Beweis davon ausgehen, dass zusätzlich zu $Zw(C, A', B)$ der Punkt A zwischen C und B' liegt. Beweisen Sie: $A'B'$ schneidet \overline{AB} . Die Gerade $A'B'$ schneidet die Seite \overline{BC} von \overline{ABC} nach Teilaufgabe innerhalb in dem Punkt A' . Die Gerade $A'B'$ geht durch keinen der Punkte A, B, C . (Würde $A'B'$ durch einen der Eckpunkte von \overline{ABC} gehen, würde $Koll(A, B, C)$ gelten.) Nach dem Axiom von Pasch wird jetzt entweder \overline{AC} oder \overline{AB} durch $A'B'$ innerhalb geschnitten. \overline{AB} kann wegen $Zw(C, A, B')$ nicht innerhalb durch $A'B'$ geschnitten werden.	4	
f)	A' und B' seien wieder die gleichbezeichneten Punkte aus den vorangegangenen Teilaufgaben. S sei der Schnittpunkt von $A'B'$ mit \overline{AB} , der entsprechend Teilaufgabe e) existiert. Man begründe durch Nennung eines wichtigen Satzes der absoluten Geometrie: $ \angle B'A'C > \angle ABC $ schwacher Außenwinkelsatz	2	
g)	Wenn \overline{ABC} rechtwinklig wäre, dann könnte nur $\angle ACB$ der rechte Winkel sein. Warum? (Hinweis: Sie brauchen zwei Teilbegründungen.) (I) Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann ist der rechte Winkel sein größter Innenwinkel. (II) Der größte Innenwinkel eines Dreiecks liegt immer dessen größter Seite gegenüber.	2	

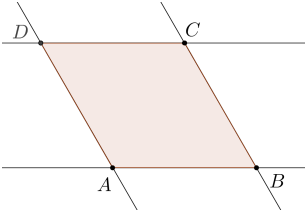
Aufgabe 3: Kriterien

Erst verlieren die Roten aus München in *Gladbach* drei Punkte, dann zwei beim *HSV*! Spontan beginnt Referendar Ole die Unterrichtseinheit *Vierecke* mit der *Raute*.

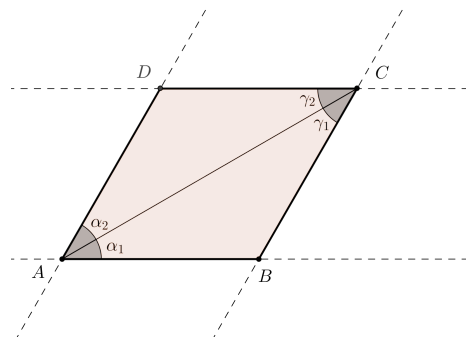
T_1 : Zunächst legen die Schüler aus vier jeweils gleichlangen Holzstäbchen Vierecke (s. Abb. 01, Deckblatt).

T_2 : Später zeichnet jeder Schüler mittels ein und desselben Streifens ein Viereck (s. Abb. 02, 03, Deckblatt).

(Hinweis: Ein Streifen ist aus abstrahierender mathematischer Sicht nichts anderes als ein Paar zueinander paralleler Geraden.)

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Definieren Sie den Begriff der <i>Raute</i> , wie er sich unmittelbar aus Tätigkeit T_1 ergibt. Verwenden Sie dabei als Oberbegriff lediglich den Begriff Viereck. Definition 1: Ein Viereck heißt <i>Raute</i> , wenn alle seine Seiten zueinander kongruent sind.	2	
b)	Wir betrachten ein entsprechend T_2 generiertes Viereck \overline{ABCD} (Abb. 04). Das Geradenpaar (AB, CD) hat mit dem Geradenpaar (AD, BC) zwei gemeinsame Eigenschaften, die sich unmittelbar aus der Verwendung des <i>Streifens</i> ergeben. Benennen Sie diese beiden Eigenschaften. $E_1 \dots$ In beiden Paaren sind die Geraden parallel zueinander: $AB \parallel CD \wedge AD \parallel BC$ $E_2 \dots$ Der Abstand der Geraden des Paares (AB, CD) ist gleich dem Abstand der Geraden des Paares (AD, BC) : $ AB, CD = AD, BC $.	2	 <p style="text-align: center;">Abb. 04</p>
c)	Satz 1a: Wenn \overline{ABCD} eine <i>Raute</i> entsprechend <i>Definition 1</i> ist, dann hat \overline{ABCD} die Eigenschaft E_1 . Beweisen Sie (auf der Rückseite von diesem Blatt) Satz 1.a. Für diesen Beweis dürfen Sie außer der Definition Viereck und Definition 1 keine weiteren Sätze oder Definitionen zu Vierecken verwenden. Schreiben Sie für den Beweis explizit die <i>Voraussetzung</i> und die <i>Behauptung</i> von Satz 1a auf.	7	
d)	Satz 1b: Wenn \overline{ABCD} eine <i>Raute</i> entsprechend <i>Definition 1</i> ist, dann hat \overline{ABCD} die Eigenschaft E_2 . Beweisen Sie (auf der Rückseite von diesem Blatt) Satz 1.b. Für diesen Beweis dürfen Sie außer der Definition Viereck, der Definition 1 und Satz 1a keine weiteren Sätze oder Definitionen zu Vierecken verwenden. Schreiben Sie für den Beweis explizit die <i>Voraussetzung</i> und die <i>Behauptung</i> von Satz 1b auf.	7	
e)	Ebenso wie die Sätze 1a und 1b gilt der folgende Satz. Satz 2: Wenn ein Viereck E_1 und E_2 genügt, dann ist es eine Raute. Formulieren Sie auf der Grundlage von 1a, 1b und 2 ein <i>Rautenkriterium</i> . (Die Eigenschaften E_1 und E_2 sind dabei auszuformulieren.) Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn seine gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel zueinander sind und der Abstand den die parallelen Seiten zueinander haben für beide parallelen Seitenpaare derselbe ist.	3	

Lösung von Aufgabe 3c

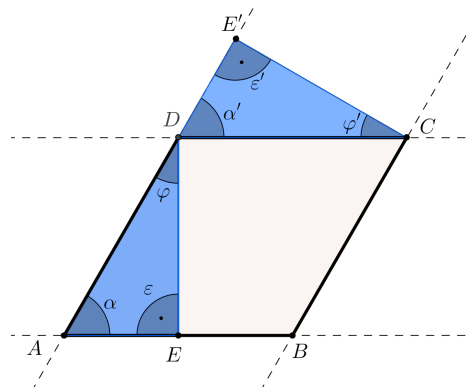


Voraussetzung:
 $\overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AB}$

Behauptung:
 $AB \parallel CD \wedge AD \parallel BC$

Nr.	Beweisschritt	Begründung
(1)	$\overline{AB} \cong \overline{CD} \wedge \overline{AD} \cong \overline{BC} \wedge \overline{AC} \cong \overline{AC}$	Voraussetzung und trivial
(2)	$\overline{ADC} \cong \overline{CBA}$	(1), SSS
(3)	$\alpha_1 \cong \gamma_2 \wedge \alpha_2 \cong \gamma_1$	(2)
(4)	$AB \parallel CD \wedge AD \parallel BC$	(3), Umkehrung Wechselwinkelsatz

Lösung von Aufgabe 3d



Voraussetzung:
 (I) $\overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AB}$

(II) $AB \parallel CD \wedge BC \parallel AD$

Behauptung:
 $\overline{DE} \cong \overline{CE'}$

Nr.	Beweisschritt	Begründung
(1)	$\alpha \cong \alpha'$	(II), Stufenwinkelsatz
(2)	$\varepsilon \cong \varepsilon'$	DE und CE' sind Lotgeraden auf AB bzw. AD
(3)	$\varphi \cong \varphi'$	(1), (2), Winkelsumme im Dreieck
(4)	$\overline{AED} \cong \overline{DE'C}$	(I), (1), (3), WSW
(5)	$\overline{DE} \cong \overline{CE'}$	(4)

Aufgabe 4: Beweisen wie die Schüler

Mark beweist den Satz des Thales mit Hilfe von Abb. 5. Ergänzen Sie den Beweis von Mark.

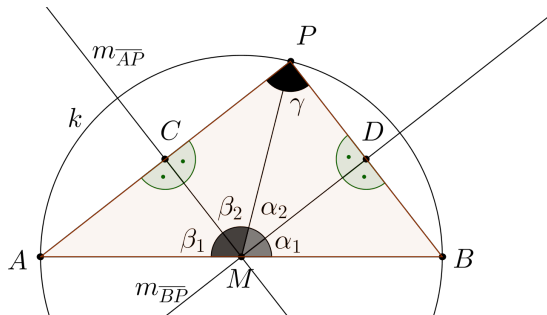


Abb. 5

Es sei \overline{ABP} ein Dreieck mit dem Umkreis k . Der Mittelpunkt von k sei der Punkt M

Voraussetzung: ... $M \in \overline{AB}$ 1 Punkt

Behauptung: ... $|\gamma| = 90^\circ$ 1 Punkt

Nr.	Beweisschritt	Begründung	Punkte
(I)	$\overline{MA} \cong \overline{MB} \cong \overline{MP}$	Radien des Umkreises	1
(II)	konstruieren $m_{\overline{BP}}$ und $m_{\overline{AP}}$, die Mittelsenkrechten von \overline{BP} bzw. \overline{AP}	Existenz der Mittelsenkrechten	1
(III)	$M \in m_{\overline{BP}}, M \in m_{\overline{AP}}$	(I), Mittelsenkrechtenkriterium	2
(IV)	$ \angle BDM = \angle PDM = \angle PCM = \angle ACM = 90^\circ$	(II), Definition der Mittelsenkrechten	1
(V)	$\overline{BD} \cong \overline{PD}, \overline{AC} \cong \overline{PC}$	(II), Definition der Mittelsenkrechten	1
(VI)	$\overline{MD} \cong \overline{MD}, \overline{MC} \cong \overline{MC}$	trivial	1
(VII)	$\overline{BMD} \cong \overline{PMD}, \overline{AMC} \cong \overline{PMC}$	(IV), (V), (VI), SWS oder (I), (V), (VI), SSS oder (I), (IV), (V), SsW, oder ...	4
(VIII)	$\alpha_1 \cong \alpha_2, \beta_1 \cong \beta_2$	(VII)	1
(IX)	$ \beta_1 + \beta_2 + \alpha_2 + \alpha_1 = 180^\circ$	Voraussetzung, Winkeladditionsaxiom, Supplementaxiom	3
(X)	$ \beta_2 + \alpha_2 = 90^\circ$	(VIII), (IX)	2
(XI)	$ \beta_2 + \alpha_2 + \angle PDM + \angle PCM + \gamma = 360^\circ$	Winkelsumme im Viereck	1
(XII)	$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \gamma = 360^\circ$	(IV), (X), (XI)	3
(XIII)	$ \gamma = 90^\circ$	(XII)	1

Name: _____ Vorname: _____ Matrikelnr:

--	--	--	--	--	--	--

 Studiengang: _____

Platz für weitere Ausführungen

Auswertung

Punkte	Note		Punkte	Note
82	1		40	4,5
81	1		39	4,5
80	1		38	4,5
79	1		37	4,5
78	1		36	4,5
77	1		35	4,5
76	1,5		34	4,5
75	1,5		33	4,5
74	1,5		32	4,5
73	1,5		31	4,5
72	1,5		30	5
71	1,5		29	5
70	2		28	5
69	2		27	5
68	2		26	5
67	2		25	5
66	2		24	5
65	2		23	5
64	2,5		22	5
63	2,5		21	5
62	2,5		20	5,5
61	2,5		19	5,5
60	2,5		18	5,5
59	2,5		17	5,5
58	3		16	5,5
57	3		15	5,5
56	3		14	5,5
55	3		13	5,5
54	3		12	5,5
53	3		11	5,5
52	3,5		10	6
51	3,5		9	6
50	3,5		8	6
49	3,5		7	6
48	3,5		6	6
47	3,5		5	6
46	4		4	6
45	4		3	6
44	4		2	6
43	4		1	6
42	4		0	6
41	4			

erreichte Punkte	Note