Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Sinn und Zweck dieses Arbeitsblattes

Auch wenn die Veranstaltung lineare Algebra heißt, brauchen wir gewissen Kenntnisse zu den Winkelfunktionen Sinus und Kosinus. Grundlegende geometrische Objekte der linearen Algebra sind Geraden. Geraden lassen sich in Koordinatensystemen durch verschiedene Typen von Gleichungen beschreiben. Die aus der Schule bekannte Gleichung lautet $y = mx + n$. Der sogenannte Anstieg m lässt sich als Tangens des Anstiegswinkels interpretieren. Der Tangens eine Winkels berechnet sich bekannterweise als der Quotient aus Sinus und Kosinus des entsprechenden Winkels.
Der Lehrstoffumfang unserer Lehrveranstaltung lineare Algebra/ analytische Geometrie ist vergleichsweise gering. Wir werden aber insbesondere durch ständige Umstrukturierungen des Lehrstoffs immer wieder neue Querverbindungen der einzelnen Teile aufzeigen und damit Ihr grundlegendes Wissen zu dem Thema Geradengleichungen derart vertiefen und festigen, wie es für einen kompetenten Mathematikleher der SI nötig ist.

Ähnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke

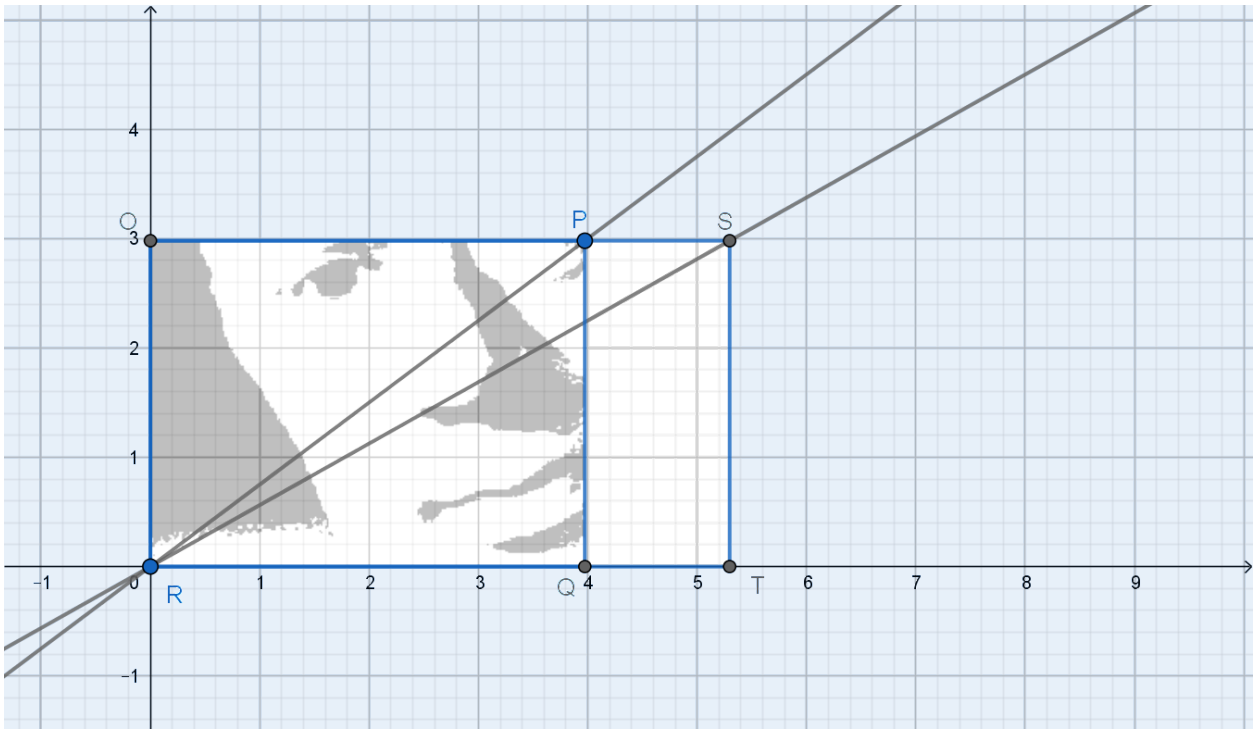
Aufgabe 2.1: Das Erik-Ode-Problem

Schaut man alte Serien aus den 70ger und 80ger Jahren des letzten Jahrunderts auf modernen Fersehgeräten, muss man feststellen, dass rechts und links schwarze Ränder bleiben, d.h. nur ein Teil des Bildschirms wird genutzt. Die Geräte verfügen zwar über Optionen, diese Ränder zu beseitigen, das sind aber letztlich Mogelpackungen.

a) Warum können alte Fernsehserien nicht ohne die genannten Ränder auf modernen Bildschirmen wiedergegeben werden?

b) Das Erik-Ode-Problem könnte man auch Horst-Tappert-Problem nennen. Kreieren Sie einen weiteren Namen dieses Problems, wobei der neue Name etwas mehr mathematisch sein sollte.

c) Unter der folgenden Url finden Sie eine Geogebradatei mit dem Namen DasErikOde-Problem.ggb: `https://www.geogebra.org/geometry/kpuyfyv9`. Welchen Sinn hat diese Datei?

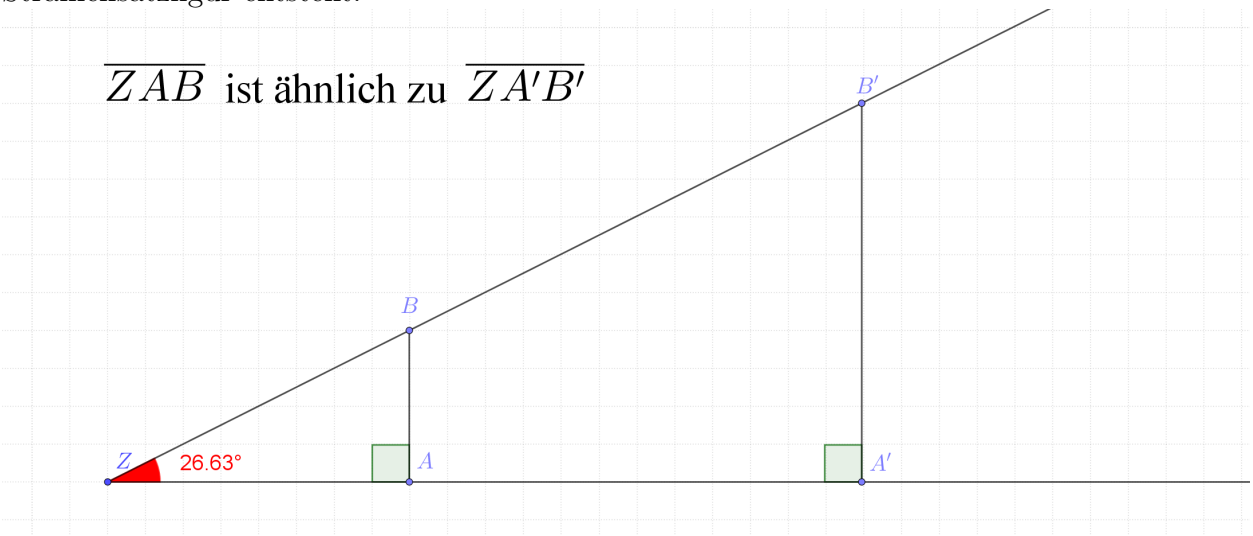


Das Erik-Ode-Problem als Horst-Tappert-Problem

d) Ein SmartTV habe eine Bildschirndiagonale von 55 Zoll. Wie allgemein üblich, hat er ein Seitenverhältnis von 16 : 9. Berechnen Sie die entsprechenden Seitenlängen.

Aufgabe 2.2: Ähnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke

Zwei Dreiecke sind ähnlich zueinander, wenn man sie so aufeinander legen kann, dass eine Strahlensatzfigur entsteht:



(Die Problemetik im Video: `https://youtu.be/Pih106srbg8`)
Sollten die beiden Dreiecke rechtwinklig sein, sind die beiden Dreiecke somit dann ähnlich zueinander, wenn sie in einer weiteren Innenwinkelgröße übereinstimmen (in der dritten dann natürlich auch). Wir beziehen uns auf die obigen beiden Dreiecke $\overline{ZAB}$ und $\overline{ZA'B'}$. Orientieren Sie sich am Quadratraster in dem Bild, Wir unterstellen Einheitsquadrate. Berechnen Sie:

a) $\frac{|ZA'|}{|ZA|}$

b) $\frac{|ZA'|}{|ZA|}$

c) $\frac{|ZA'|}{|ZA|}$

Aufgabe 2.3: Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich zueinander, wenn sie in einem weiteren Winkel übereinstimmen. Es seien $\overline{ABC}$ und $\overline{A'B'C'}$ zwei rechtwinklige Dreiecke mit dem rechten Winkel bei B bzw. B'. Ferner gelte: $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$.

a) Beweisen Sie: $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{A'C'|}$

b) Beweisen Sie: $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{A'C'|}$

c) Begründen Sie warum es sinnvoll ist von **dem** Sinus bzw. **dem** Kosinus des Winkels $\angle CAB$ zu sprechen.

Aufgabe 2.4

Beweisen Sie:

a) $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

b) $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c) $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

d) $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

e) $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})\frac{1}{2}\sqrt{2}$

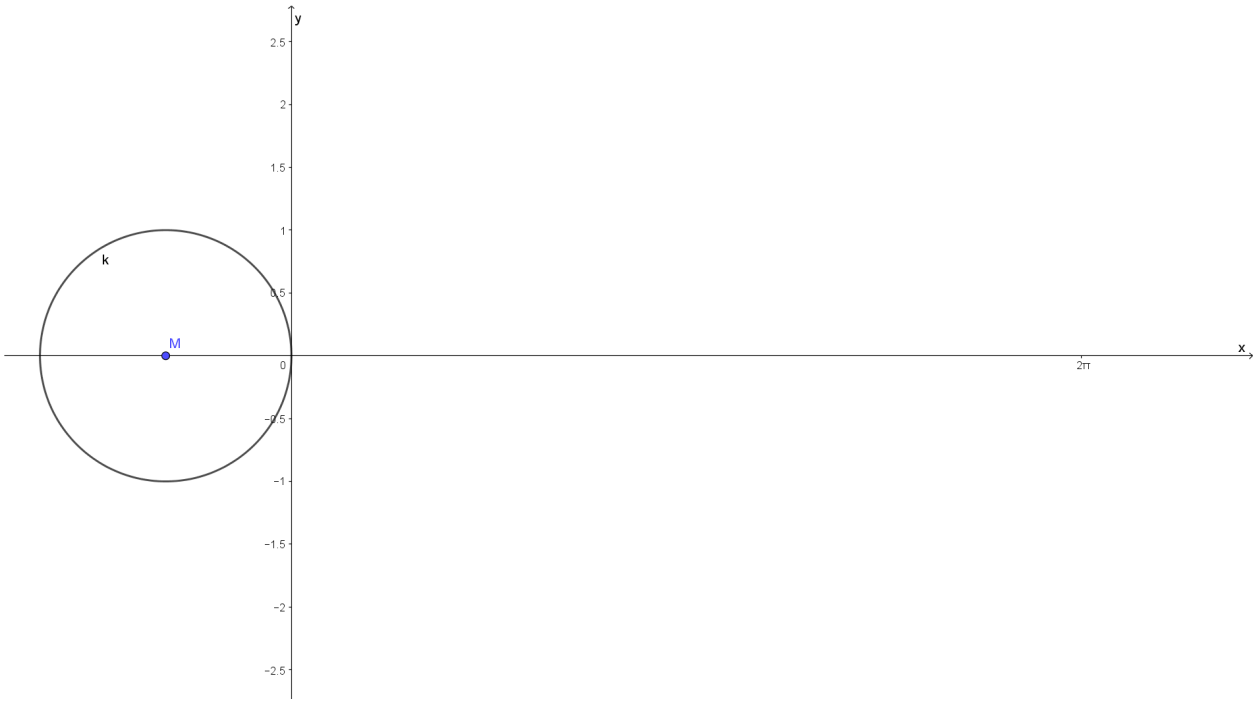
f) $\cos(\frac{4}{5}\pi) = -\cos(\pi - \frac{4}{5}\pi)$

Aufgabe 2.5

Generieren Sie eine Geogebradatei, die die Entstehung des Graphen der Kosinusfunktion für den Definitionsbereich $[-4\pi, 4\pi]$ illustriert.

Aufgabe 2.6

Drucken Sie das folgende Bild aus und generieren Sie durch geschicktes Falten 17 ausgewählte Punkte des Graphen der Funktion $y = \sin x$.



Aufgabe 2.7

Jemand druckt das Bild von Aufgabe 2.6 aus. Bestürzt muss er dann feststellen, dass sein Drucker die Markierung 2π auf der x-Achse nicht mitgedruckt hat. Näherungsweise faltet den Punkt $(2\pi, 0)$ als drei mal den Durchmesser des Einheitskreises, d.h. er faltet er den Punkt $(6, 0)$. Die Punkte der Sinuslinie, die nun gefaltet werden, wären eigentlich Punkte des Graphen der Funktion $y = \sin(b \cdot x)$. Berechnen Sie b.