

Prüfungsthemen/Kontrollfragen

lineare Algebra

1 schulische Grundlagen

1.1 Themen, Begriffe

- 1) Strahlensätze
- 2) Ähnlichkeit von Dreiecken
- 3) Ähnlichkeit von rechtwinkligen Dreiecken
- 4) Kreisumfang und Kreisflächeninhalt
- 5) Gradmaß und Bogenmaß
- 6) Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck und im Einheitskreis
- 7) Sinusfunktion, Kosinusfunktion
- 8) spezielle Funktionswerte der der Sinus- und der Kosinusfunktion
- 9) Vektoren als Pfeilklassen
- 10) Vektoren als geordnete Paare bzw. geordnete Tripel von reellen Zahlen
- 11) Addition von Pfeilklassen
- 12) Addition von geordneten paaren reeller Zahlen
- 13) Vervielfachen von Vektoren mit reellen Zahlen
- 14) Skalarprodukt zweier Vektoren in der Form $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \angle \vec{a}, \vec{b}$
- 15) Skalarprodukt zweier Vektoren in der Form $\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$
- 16) Äquivalenz der beiden Arten das Skalarprodukt zweier Vektoren zu berechnen.

1.2 Kontrollfragen/-aufgaben

- (1) Berechnen Sie
 - a) $\sin 30^\circ, \cos 30^\circ$
 - b) $\sin 45^\circ, \cos 45^\circ$
 - c) $\sin 60^\circ, \cos 60^\circ$
- (2) Beweisen Sie: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- (3) Berechnen Sie das Bogenmaß von
 - a) 30°
 - b) 45°
 - c) 90°

d) 330°

(4) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(5) Gegeben seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms \overline{ABCD} mittels eines Skalarproduktes.

(6) Berechnen sie den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ unter Verwendung eines Skalarproduktes.

(7) Erläutern Sie die geometrische Bedeutung des Skalarproduktes zweier Vektoren.

(8) Das Skalarprodukt zweier Vektoren läßt sich auf zwei verschiedene Arten berechnen. Skizzieren Sie eine Idee des Beweises der Äquivalenz beider Berechnungsarten.

2 Geradengleichungen in der Ebene

2.1 Themen, Begriffe

- (1) Steigungsdreieck
- (2) Anstieg
- (3) Anstiegswinkel
- (4) y-Achsenabschnitt
- (5) $y = mx + n$
- (6) $ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$
- (7) Normalenvektor
- (8) Normaleneinheitsvektor
- (9) Hessesche Normalform
- (10) Abstand eines Punktes von einer Geraden
- (11) Richtungsvektor einer Geraden
- (12) Punktrichtungsgleichung einer Geraden
- (13) Zusammenhang zwischen Richtungsvektor und Normalenvektor einer Geraden
- (14) Zusammenhänge zwischen Geraden, die senkrecht aufeinander stehen

2.2 Kontrollfragen und- aufgaben

- (1) Gegeben seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Gleichung vom Typ $y = mx + n$ zur Beschreibung der Geraden AB .
- (2) Gegeben seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Gleichung vom Typ $ax + by + c = 0$ zur Beschreibung der Geraden AB .
- (3) Gegeben seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Gleichung vom Typ $ax + by + c = 0$ in der Hesseschen Normalform zur Beschreibung der Geraden AB .
- (4) Gegeben seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ zur Geraden AB
- (5) Gegeben seien die Geraden g und h durch die Gleichungen

$$5x + 2y + 3 = 0 \tag{1}$$

$$5x + 2y + 4 = 0 \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Bestimmen Sie den Abstand $|gh|$.

- (6) Erläutern Sie, warum man mit der Hesseschen Normalform einer Gleichung vom Typ $ax + by + c = 0$ sehr einfach den Abstand eines Punktes zu einer Geraden bestimmen kann.
- (7) Es gibt einen Typ von Geraden, der nicht durch eine Gleichung des Typs $y = mx + n$ beschreibbar ist. Welcher Typ von Geraden ist das?
- (8) Gegeben seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Punktrichtungsgleichung zur Beschreibung der Geraden AB .
- (9) Gegeben Sei eine Gerade g durch die Gleichung $3x + 2y + 1 = 0$ und auf g der Punkt A , dessen x -Koordinate 1 sein möge. Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden s mit $A \in s \wedge S \perp g$.

3 Ebenengleichungen

3.1 Themen, Begriffe

- (1) $ax + by + cz + d = 0$

(2) Bedeutung des Vektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

(3) Parameterdarstellung einer Ebene $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

(4) Gerade als Schnitt zweier Ebenen

(5) Hessesche Normalform der Gleichung $ax + by + cz + d = 0$

(6) Abstand eines Punktes zu einer Ebene

(7) Generierung der Ebenengleichung aus den Koordinaten dreier nichtkollinearer Punkte.

3.2 Kontrollfragen und -aufgaben

(1) Gegeben sei im \mathbb{R}^3 das Quadrat \overline{ABCD} mit

$$A = (-1, -1, -1)$$

$$B = (1, -1, -1)$$

$$C = (1, 1, -1)$$

$$D = (-1, 1, -1)$$

Wir generieren aus \overline{ABCD} einen Würfel, indem wir das Quadrat um seine Seitenlänge in z -Richtung verschieben. Der Würfelpunkt E liegt jetzt über A , F über B , G über C und H über D .

Der Würfel $\overline{ABCDEFGH}$ wird jetzt mathematisch positiv um die z -Achse mit dem Drehwinkel 45° gedreht. Geben Sie bezüglich des gedrehten Würfels eine Parameterdarstellung der Geraden an, auf der die Raumdiagonale \overline{AG} liegt.

(2) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zur Ebene, zu den Seitenflächen eines oktaeders mit der Kantenlänge 1, dessen Eckpunkt jeweils auf einer Koordinatenachse liegen.

(3) Wie kann man aus den Koordinaten dreier nichtkollinearer Punkte einen Vektor generieren, der senkrecht auf der durch die drei Punkte aufgespannten Ebene steht?

4 lineare Gleichungssysteme

4.1 Themen, Begriffe

(1) lineares Gleichungssystem

(2) äquivalente Umformungen linearer Gleichungssysteme

- (3) kleine Koeffizientenmatrix, große Koeffizientenmatrix
- (4) Gaußscher Algorithmus
- (5) Rang der kleinen Koeffizientenmatrix, Rang der großen Koeffizientenmatrix
- (6) Satz von Kronecker-Capelli

4.2 Kontrollfragen und -aufgaben

(1)

(2) Geben Sie eine LGS an, das das folgende Problem löst:

Gegeben sei eine Gerade g durch $-2x - 3y + 1 = 0$ und der Punkt $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Man bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes von g mit der Geraden h für die gilt: $g \perp h \wedge A \in h$.

(3) Lösen Sie das folgende LGS mit dem Gaußalgorithmus. (8 Punkte)

$$3x + 6y + 9z = 6$$

$$2x + 1y + 2z = 6$$

$$4x + 2y + 3z = 2$$

(4) Lösen Sie das folgende LGS mit dem Gaußalgorithmus. (8 Punkte)

$$1x + 2y + 3z = 4$$

$$5x + 6y + 7z = 8$$

$$9x + 10y + 11z = 12$$

(5) Ändern Sie das LGS

$$1x + 2y + 3z = 4$$

$$5x + 6y + 7z = 8$$

$$9x + 10y + 11z = 12$$

derart, dass es eindeutig lösbar ist.

(6) Gegeben seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Generieren Sie eine Gleichung zur Beschreibung der Geraden AB , indem Sie ein LGS aufstellen und lösen.

(7) Erläutern Sie die Begriffe kleine Koeffizientenmatrix, große Koeffizientenmatrix, Rang dieser Matrizen

(8) Erläutern Sie den Satz von Kronecker-Capelli

- (9) Der Punkt $P' = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ist das Bild des Punktes P bei einer Drehung um 30° mit dem Koordinatenursprung als Drehzentrum. Berechnen Sie die Koordinaten von P .
- (10) Ein LGS wurde durch den Gaußschen Algorithmus in ein LGS der Form

$$x + 0 + 0 = 3$$

$$0 + v + 0 = 4$$

$$0 + 0 + z = 3$$

überführt. Interpretieren Sie dieses LGS geometrisch.