1 Übungsaufgaben Serie I zum 18.11.2020

Aufgabe 1.1

Bewegungen sind eineindeutig
Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 1.1

Es sei β eine Bewegung.
$\beta(A) = C \wedge \beta(B) = C \Rightarrow A \equiv B$

Aufgabe 1.2

Parallelität als Invariante von Bewegungen
Es sei bereits bewiesen, dass bei jeder Bewegung Winkel auf kongruente Winkel und dabei Scheitelpunkte auf Scheitelpunkte abgebildet werden. Beweisen Sie, dass für jede Bewegung gilt: Zueinander parallele Geraden werden auf zueinander parallele Geraden abgebildet.
(Hinweis: Sie dürfen natürlich alle Sätze aus der Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“ verwenden.)

Aufgabe 1.3

Flächeninhalt als Invariante von Bewegungen
Es sei β eine Bewegung. $\overline{A'B'C'}$ sei das Bild von $\overline{ABC}$ bei β.
Beweisen Sie: $|\overline{A'B'C'}| = |\overline{ABC}|$.
($|\overline{ABC}|$ steht für den Flächeninhalt des Dreiecks $\overline{ABC}$.)

Aufgabe 1.4

Fixpunkte
Es sei Z ein beliebiger aber fester Punkt des Raumes $\mathbb{P}$. Ferner sei ε eine Ebene in $\mathbb{P}$ mit $Z \notin \varepsilon$. Wir definieren eine Abbildung ZP_Z wie folgt:
$\forall P \in \mathbb{P} : ZP_Z(P) = ZP \cap \varepsilon$.
Beschreiben Sie alle Fixpunkte bezüglich ZP_Z.

Aufgabe 1.5

Abbildungen und NAF von Abbildungen

a) *Es sei k ein Einheitskreis in Mittelpunktslage.*
Warum ist k kein Graph einer Abbildung $[-1, 1] \to [-1, 1]$.

b) *Schränken Sie k aus Aufgabe a) auf k' derart ein, dass k' der Graph einer Abbildung $[-1, 1] \to [-1, 1]$ ist.*

c) *Auf dem Intervall $[0, 1]$ definieren wir $f(x) := \sqrt{1 - x^2}$. Beweisen Sie, dass $f(x)$ umkehrbar eindeutig ist und geben Sie die Umkehrabbildung an.*

d) *Gegeben seien die Abbildungen $f_1(x) := 3x^2 + 4$ und $f_2(x) := 3x + 2$. Bestimmen Sie $f_1 \circ f_2(5) = f_2(f_1(5))$.*

Aufgabe 1.6

Bewegung mit genau einer Fixgeraden, die keine Fixpunktgerade ist

Definieren Sie eine fixpunktfreie Bewegung, die genau eine Fixgerade hat. Definieren bedeutet in diesem Kontext, dass Sie beschreiben, wie ein beliebiger Punkt auf sein Bild abzubilden ist. Sie dürfen auf ihr Schulwissen zu speziellen Bewegungen zurückgreifen.

Aufgabe 1.7

Ein Punkt zu viel

Es seien k ein Kreis und $\overline{AB}$ ein Durchmesser von k. N sei einer der Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ mit k. Wir definieren auf k die folgende Abbildung S:

$$\forall K \in k : S(K) = NK \cap AB$$

a) *Begründen Sie: S ist nicht fixpunktfrei.*

b) *Heutzutage ist eine Abbildung nur dann eine Abbildung, wenn sie linkstotal ist. Warum ist S nicht linkstotal?*

c) *Schränken Sie den Definitionsbereich von S derart ein, dass S linkstotal ist.*

Aufgabe 1.8

Spiegelungen am Kreis

In der Ebene ε sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Wir definieren die folgende Abbildung KI:

$$\forall P \in \varepsilon \setminus \{M\} : P' \in MP^{+} \wedge |MP| \cdot |MP'| = r^2$$

a) *Bestimmen Sie die Fixpunkte von KI.*

b) *Generieren Sie eine GeogebraApp, die die Abbildung KI illustriert.*