Axiome der Euklidischen Geometrie von Moise/Downs

Inzidenzaxiome

Axiom I.0:

Geraden und Ebenen sind Punktmengen.

Axiom I.1:

(Axiom von der Geraden) Zu zwei beliebigen verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die die beiden Punkte enthält.

Axiom I.2:

Zu jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte, die dieser Geraden angehören.

Axiom I.3:

Es gibt wenigstens 3 Punkte, die nicht kollinear sind.

Axiom I.4:

Zu je drei nichtkollinearen Punkten gibt es genau eine Ebene, die diese drei Punkte enthält. Jede Ebene enthält (wenigstens) einen Punkt.

Axiom I.5:

Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene ε liegen, so gehört g zu ε.

Axiom I.6:

Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie noch mindestens einen weiteren Punkt gemeinsam.

Axiom I.7:

Es gibt vier Punkte, die nicht komplanar sind.

Abstandsaxiome

Axiom II.1 (Abstandsaxiom)

Zu je zwei Punkten A und B gibt es eine eindeutig bestimmte nicht negative reelle Zahl d mit $d = 0 :\Longleftrightarrow A = B$.

Axiom II.2:

Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB| = |BA|$.

Axiom II/3: (Dreiecksungleichung)

Für drei beliebige Punkte A, B und C gilt: $|AB| + |BC| \geq |AC|$.
Falls $\operatorname{koll}(ABC)$, dann ist eine der folgenden Gleichungen erfüllt:

(I) $|AB| + |BC| = |AC|$

(II) $|AC| + |CB| = |AB|$

(III) $|BA| + |AC| = |BC|$

Ist umgekehrt eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so sind A, B und C kollinear.

Axiome der Anordnung

Axiom III.1: (Axiom vom Lineal)

Zu jeder nicht negativen reelen Zahl d gibt es auf jedem Strahl p genau einen Punkt, der zum Anfangspunkt von p den Abstand d hat.

Axiom III.2: (Das Axiom von Pasch)

Gegeben sei ein Dreieck $\overline{ABC}$. Ferner sei g eine Gerade, die durch keinen der drei Eckpunkte A, B, C geht. Wenn g eine der drei Seiten des Dreiecks $\overline{ABC}$ schneidet, dann schneidet g genau eine weitere Seite des Dreiecks $\overline{ABC}$.

Axiome der Winkelmessung

Axiom IV.1: (Winkelmaßaxiom)

Zu jedem Winkel α gibt es genau eine reelle Zahl ω zwischen 0 und 180.

Axiom IV.2: (Winkelkonstruktionsaxiom)

Es sei $g \equiv SA$ eine Gerade in der Ebene ε. Zu jeder reellen Zahl ω mit $0 < \omega < 180$ gibt es in jeder der beiden durch g bestimmten Halbebenen der Ebene ε genau einen Strahl SB^+ mit $|\omega| = |\angle ASB|$

Axiom IV.3: (Winkeladditionsaxiom)

Wenn der Punkt P zum Inneren des Winkels $\angle ASB$ gehört ,
dann gilt $|\angle ASP| + |\angle PSB| = |\angle ASB|$.

Axiom IV.4: (Supplementaxiom)

Nebenwinkel sind supplementär.

Axiome der Dreieckskongruenz

Axiom V: (Kongruenzaxiom SWS)

Wenn für zwei Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ die folgenden 3 Kongruenzen

- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
- $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
- $\angle CAB \cong \angle FDE$

gelten, dann sind die beiden Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent zueinander.

Euklidisches Parallelenaxiom

Axiom VI: EPA

Zu jedem Punkt P außerhalb einer Geraden g gibt es höchstens eine Gerade h, die durch P geht und zu g parallel ist.