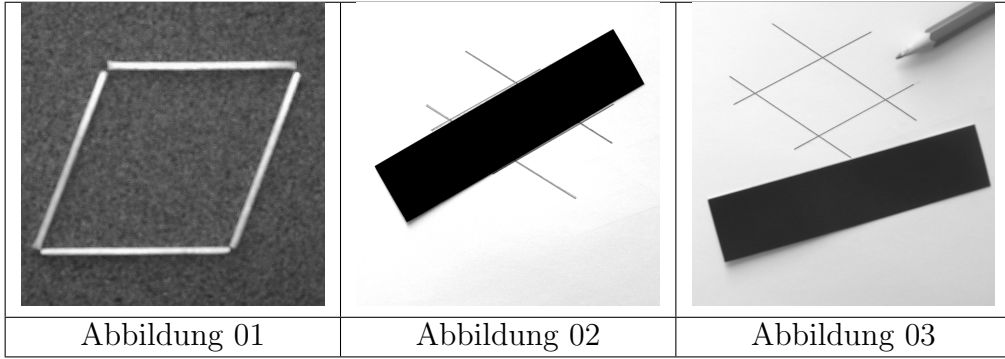


PH Heidelberg, Fach Mathematik
Klausur zur Akademischen Teilprüfung, Modul 2
Einführung in die Geometrie



Aufgabe 1: Definieren

Nr.	Aufgabe	Punkte.							
a)	Definieren Sie den Begriff <i>Dreieck</i> \overline{ABC} .	2							
b)	Ergänzen Sie unter Verwendung der Punkte A, B, C, D, E, F : Die beiden Winkel $\angle ABC$ und $\angle DEF$ bilden ein Paar von <i>Nebenwinkeln</i> , wenn ...	3							
c)	Ergänzen Sie: Unter den Innenwinkeln des Dreiecks \overline{ABC} versteht man ...	3							
d)	Ergänzen Sie: Der Winkel φ ist ein Außenwinkel des Dreiecks \overline{XYZ} , wenn ...	3							
e)	Definition: (<i>schön</i>) Eine ebene Figur \mathcal{F} ist <i>schön</i> , wenn es eine Gerade g derart gibt, dass gilt: $\forall P \in \mathcal{F} \exists Q \in \mathcal{F}: g$ ist die Mittelsenkrechte von \overline{PQ} . Nennen Sie	3							
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%;">ein <i>schönes</i> Viereck, das kein Trapez ist,</td> <td style="width: 33%;">eine <i>schöne</i> krummlinige Figur, die kein Kreis ist,</td> <td style="width: 33%;">eine <i>schöne</i> Figur, die die Schüler auch als Graph einer Funktion kennen lernen.</td> </tr> <tr> <td>...</td> <td>...</td> <td>...</td> </tr> </table>	ein <i>schönes</i> Viereck, das kein Trapez ist,	eine <i>schöne</i> krummlinige Figur, die kein Kreis ist,	eine <i>schöne</i> Figur, die die Schüler auch als Graph einer Funktion kennen lernen.		
ein <i>schönes</i> Viereck, das kein Trapez ist,	eine <i>schöne</i> krummlinige Figur, die kein Kreis ist,	eine <i>schöne</i> Figur, die die Schüler auch als Graph einer Funktion kennen lernen.							
...							
f)	Geben Sie eine Definition für den Begriff <i>Zentriwinkel</i> in der ebenen Geometrie an.	2							
g)	Definieren Sie unter der Verwendung des Begriffs <i>Zentriwinkel</i> den Begriff <i>Viertelkreis</i> .	2							
h)	Definieren Sie \overline{ABCD} ist <i>konvex</i> ohne Verwendung des Begriffs <i>Inneres</i> dafür aber unter Verwendung der beiden Strecken \overline{AC} und \overline{BD} . Definition: \overline{ABCD} ist <i>konvex</i> , wenn ...	2							

Aufgabe 2: Argumentieren, Begründen, Beweisen

Alle Teilaufgaben von Aufgabe 2 beziehen sich auf ein Dreieck \overline{ABC} mit der Eigenschaft (*) $|AC| < |BC| < |AB|$.

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Begründen Sie durch Nennung eines Axioms: $\exists a, b \in \mathbb{R} : a = BC \wedge b = AC $	1	
b)	Begründen Sie: $\angle CAB \not\cong \angle CBA$	3	
c)	Begründen Sie durch Nennung eines Axioms: $\exists A' \in CB^+ \wedge \exists B' \in CA^+ : CA' = CA = b \wedge CB' = CB = a$	1	
d)	Es sei A' der Punkt aus Teilaufgabe c) auf CB^+ . Beweisen Sie: $Zw(C, A', B)$.	4	
e)	A' und B' seien die Punkte aus c). Sie dürfen für den folgenden Beweis davon ausgehen, dass zusätzlich zu $Zw(C, A', B)$ der Punkt A zwischen C und B' liegt. Beweisen Sie: $A'B'$ schneidet \overline{AB} .	4	
f)	A' und B' seien wieder die gleichbezeichneten Punkte aus den vorangegangenen Teilaufgaben. S sei der Schnittpunkt von $A'B'$ mit \overline{AB} , der entsprechend Teilaufgabe e) existiert. Man begründe durch Nennung eines wichtigen Satzes der absoluten Geometrie: $ \angle B'A'C > \angle ABC $	2	
g)	Wenn \overline{ABC} rechtwinklig wäre, dann könnte nur $\angle ACB$ der rechte Winkel sein. Warum? (Hinweis: Sie brauchen zwei Teilbegründungen.) (I) (II)	2	

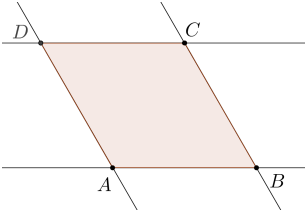
Aufgabe 3: Kriterien

Erst verlieren die Roten aus München in *Gladbach* drei Punkte, dann zwei beim *HSV*! Spontan beginnt Referendar Ole die Unterrichtseinheit *Vierecke* mit der *Raute*.

T_1 : Zunächst legen die Schüler aus vier jeweils gleichlangen Holzstäbchen Vierecke (s. Abb. 01, Deckblatt).

T_2 : Später zeichnet jeder Schüler mittels ein und desselben Streifens ein Viereck (s. Abb. 02, 03, Deckblatt).

(Hinweis: Ein Streifen ist aus abstrahierender mathematischer Sicht nichts anderes als ein Paar zueinander paralleler Geraden.)

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Definieren Sie den Begriff der <i>Raute</i> , wie er sich unmittelbar aus Tätigkeit T_1 ergibt. Verwenden Sie dabei als Oberbegriff lediglich den Begriff Viereck. Definition 1:	2	
b)	Wir betrachten ein entsprechend T_2 generiertes Viereck \overline{ABCD} (Abb. 04). Das Geradenpaar (AB, CD) hat mit dem Geradenpaar (AD, BC) zwei gemeinsame Eigenschaften, die sich unmittelbar aus der Verwendung des Streifens ergeben. Benennen Sie diese beiden Eigenschaften. $E_1 \dots$ $E_2 \dots$	2	 <p style="text-align: center;">Abb. 04</p>
c)	Satz 1a: Wenn \overline{ABCD} eine <i>Raute</i> entsprechend <i>Definition 1</i> ist, dann hat \overline{ABCD} die Eigenschaft E_1 . Beweisen Sie (auf der Rückseite von diesem Blatt) Satz 1.a. Für diesen Beweis dürfen Sie außer der Definition Viereck und Definition 1 keine weiteren Sätze oder Definitionen zu Vierecken verwenden. Schreiben Sie für den Beweis explizit die <i>Voraussetzung</i> und die <i>Behauptung</i> von Satz 1a auf.	7	
d)	Satz 1b: Wenn \overline{ABCD} eine <i>Raute</i> entsprechend <i>Definition 1</i> ist, dann hat \overline{ABCD} die Eigenschaft E_2 . Beweisen Sie (auf der Rückseite von diesem Blatt) Satz 1.b. Für diesen Beweis dürfen Sie außer der Definition Viereck, der Definition 1 und Satz 1a keine weiteren Sätze oder Definitionen zu Vierecken verwenden. Schreiben Sie für den Beweis explizit die <i>Voraussetzung</i> und die <i>Behauptung</i> von Satz 1b auf.	7	
e)	Ebenso wie die Sätze 1a und 1b gilt der folgende Satz. Satz 2: Wenn ein Viereck E_1 und E_2 genügt, dann ist es eine Raute. Formulieren Sie auf der Grundlage von 1a, 1b und 2 ein <i>Rautenkriterium</i> . (Die Eigenschaften E_1 und E_2 sind dabei auszuformulieren.)	3	

Aufgabe 4: Beweisen wie die Schüler

Mark beweist den Satz des Thales mit Hilfe von Abb. 5. Ergänzen Sie den Beweis von Mark.

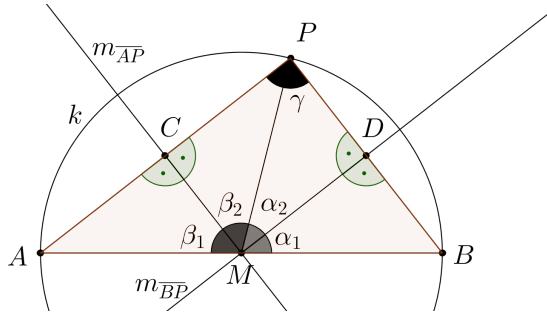


Abb. 5

Es sei \overline{ABP} ein Dreieck mit dem Umkreis k . Der Mittelpunkt von k sei der Punkt M

Voraussetzung: ... 1 Punkt

Behauptung: ... 1 Punkt

Nr.	Beweisschritt	Begründung	Punkte
(I)	$\overline{MA} \cong \overline{MB} \cong \overline{MP}$...	1
(II)	konstruieren $m_{\overline{BP}}$ und $m_{\overline{AP}}$, die Mittelsenkrechten von \overline{BP} bzw. \overline{AP}	...	1
(III)	$M \in m_{\overline{BP}}, M \in m_{\overline{AP}}$...	2
(IV)	$ \angle BDM = \angle PDM = \angle PCM = \angle ACM = 90^\circ$...	1
(V)	$\overline{BD} \cong \overline{PD}, \overline{AC} \cong \overline{PC}$...	1
(VI)	$\overline{MD} \cong \overline{MD}, \overline{MC} \cong \overline{MC}$...	1
(VII)	$\overline{BMD} \cong \overline{PMD}, \overline{AMC} \cong \overline{PMC}$...	4
(VIII)	$\alpha_1 \cong \alpha_2, \beta_1 \cong \beta_2$...	1
(IX)	$ \beta_1 + \beta_2 + \alpha_2 + \alpha_1 = 180^\circ$...	3
(X)	$ \beta_2 + \alpha_2 = 90^\circ$...	2
(XI)	$ \beta_2 + \alpha_2 + \angle PDM + \angle PCM + \gamma = 360^\circ$...	1
(XII)	$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \gamma = 360^\circ$...	3
(XIII)	$ \gamma = 90^\circ$...	1

Platz für weitere Ausführungen

Auswertung

Punkte	Note		Punkte	Note
82	1		40	4,5
81	1		39	4,5
80	1		38	4,5
79	1		37	4,5
78	1		36	4,5
77	1		35	4,5
76	1,5		34	4,5
75	1,5		33	4,5
74	1,5		32	4,5
73	1,5		31	4,5
72	1,5		30	5
71	1,5		29	5
70	2		28	5
69	2		27	5
68	2		26	5
67	2		25	5
66	2		24	5
65	2		23	5
64	2,5		22	5
63	2,5		21	5
62	2,5		20	5,5
61	2,5		19	5,5
60	2,5		18	5,5
59	2,5		17	5,5
58	3		16	5,5
57	3		15	5,5
56	3		14	5,5
55	3		13	5,5
54	3		12	5,5
53	3		11	5,5
52	3,5		10	6
51	3,5		9	6
50	3,5		8	6
49	3,5		7	6
48	3,5		6	6
47	3,5		5	6
46	4		4	6
45	4		3	6
44	4		2	6
43	4		1	6
42	4		0	6
41	4			

erreichte Punkte	Note